多模态机器学习 24 秋学期-第一次作业

龚舒凯 2022202790

日期：October 22, 2024

1 卷积的平移不变性

首先我们要明确卷积的定义。在此处，我们考虑的是填充 (padding) 为 $m-1$，步长 (stride) 为 1 的一维卷积。设 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ 为输入向量，$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$ 为卷积核，那么 $\mathbf{x}$ 关于 $\mathbf{w}$ 的离散卷积定义为

$$y_i = (\mathbf{x} * \mathbf{w})_i = \sum_{j=1}^{m} w_j x_{i+j-m} \tag{1}$$

默认 $i \leq 0$ 与 $i > n$ 的 x_i 为 0。也就是说，这里的卷积实际上指的是数字信号处理中"自相关"的定义。例如 $y_3 = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$。

1.1 一维情形

不妨仍然记 zero-padding 操作后的输入向量 $\mathbf{x}'$ 为 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$，zero-padding 处的 x_i 的下标 i 满足 $i \leq 0$ 或 $i > n$，但出于叙述方便的考虑不在向量中直接表示出来。那么向量 $\mathbf{x}'$ 关于卷积核 $\mathbf{w}$ 的卷积可以写为

$$y'_i = (\mathbf{x}' * \mathbf{w})_i = \sum_{j=1}^{3} w_j x'_{i+j-3} \tag{2}$$

现在对 $\mathbf{x}'$ 进行平移操作。显然，若向右平移 p 位，则 $x''_i = x'_{i-p}$，若向左移动 p 位，则 $x''_i = x'_{i+p}$（注：这里向量元素的平移是循环的，$\mathbf{x}''$ 的长度与 $\mathbf{x}'$ 相同)。不失一般性，我们向左平移 $\mathbf{x}'$ p 位，那么 $\mathbf{x}''$ 关于卷积核 $\mathbf{w}$ 的卷积可以写为

$$y''_i = (\mathbf{x}'' * \mathbf{w})_i = \sum_{j=1}^{3} w_j x''_{i+j-3} = \sum_{j=1}^{3} w_j x'_{i+j+p-3} = y'_{i+p} \tag{3}$$

题干描述保证了平移后的 $\mathbf{x}''$ 首尾仍然各至少有 2 个 0。公式 (3) 说明了 $\mathbf{y}''$ 恰好可由 $\mathbf{y}'$ 向左平移 p 位得到。证毕。

2 二维情形

二维情形下，不妨设输入矩阵为 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N}$，卷积核为 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{U \times V}$。我们考虑的是填充 (padding) 为 $m-1$，步长 (stride) 为 1 的二维卷积。zero-padding 处的 $X_{i,j}$ 的下标 (i, j) 满足 $i, j \leq 0$ 或 $i > M, j > N$，则经 zero-padding 后的 $\mathbf{X}'$ 关于 $\mathbf{W}$ 的离散卷积定义为

$$Y_{i,j} = \sum_{u=1}^{U} \sum_{v=1}^{V} W_{u,v} X'_{i+u-m,j+v-n} \tag{4}$$

不失一般性，若将矩阵中的元素 X_{ij} 向左平移 p 位，向上平移 q 位（且仍能保持矩阵的 zero-padding 成立），那么平移后的矩阵 $\mathbf{X}''$ 关于卷积核 $\mathbf{W}$ 的卷积可以写为

$$Y''_{i,j} = \sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{V} W_{u,v} X''_{i+u-m,j+v-n} = \sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{V} W_{u,v} X'_{i+u+p-m,j+v+q-n} = Y'_{i+p,j+q} \tag{5}$$

公式 (5) 说明了 $\mathbf{Y}''$ 恰好可由 $\mathbf{Y}'$ 向左平移 p 位，向上平移 q 位得到。证毕。

3 $m \to \infty$ 情形

一维情形下，即使输入的维度 $m \to \infty$ 也并不影响平移不变性的结论，由 (3) 公式易知，只要保证平移后的向量的 zero-padding 条件仍然成立（对于本题，即向量首尾都至少有 2 个 0），那么平移 p 位后的向量关于卷积核的卷积仍然可以由原向量关于卷积核的卷积平移方向相同的 p 位得到。