Homework 1

2022 年 9 月 27 日

1. 证明：$f(x)$为凸函数的充要条件为$epi(f)$为凸集.

2. 设凸函数$f(x)$为$R^n \to R$的一阶连续可微函数。证明： f(x)的任意局部极小点必为全局极小值点；若f(x)是严格凸函数，其极小值点是唯一的。

3. 证明下列序列的序列的收敛速度：
   (1) 2^{-k}线性收敛；
   (2) k^{-k}超线性收敛；
   (3) $a^{2^k}(0 < a < 1)$二阶收敛。

4. 证明：设α_k是$\min\limits_{\alpha>0} f(x_k + \alpha d_k)$的解，$\|\nabla^2 f(x_k + \alpha d_k)\| \leq M$对一切$\alpha > 0$均成立，其中$M$为一正常数，则有

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k) \geq \tfrac{1}{2M}\|g_k\|^2 cos^2\langle d_k, -g_k\rangle$$

5. 证明：设$f(x_k + \alpha d_k)$在$\alpha > 0$时有下界，且$g_k^T d_k < 0$，则必存在α_k，在点$x_k + \alpha_k d_k$处满足Wolfe准则或Goldstein准则。

6. 请简要说明最速下降方法的计算步骤，并解决下面这个问题:
   取初值点$x^{(0)} = (1,1)^T$，采用精确线性搜索的最速下降方法求解如下无约束问题：

$$minf(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$