Homework 2

2022 年 10 月 23 日

1. 对问题
$$minf(x) = 10x_1^2 + x_2^2,$$
选择初始点为$(0.1, 1)^T$,证明最速下降法线性收敛。

2. 设函数$f(x)$为凸的梯度L-利普希兹连续函数，$f^* = f(x^*) = \min_x f(x)$存在且可达，如果步长$\alpha_k$ 取为常数α且满足$0 < \alpha < \frac{1}{L}$,那么由最速下降法得到的点列$\{x^k\}$的函数值收敛到最优值，且在函数值的意义下收敛速度为$O(\frac{1}{k})$。(利普希兹连续函数性质：$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2$)

3. 用牛顿法求$f(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 16x + 4$的局部极小值点，取初值点$x_0 = 3$并叙述算法步骤，要求精确到小数点后三位。

4. 设$f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$,$x^0 = (0, 0)^T$,确定$v$的一个下界$\overline{v}$使得$G_0 + vI$在$v > \overline{v}$时正定，令$v_0 = 1$，此时由LM方法产生了$d_0$,验证此时$f(x^0 + d_0) < f(x^0)$,再验证只有当$v \leq 0.9$时得到的$d_0$才能使$f(x^0 + d_0) < f(x^0)$。

5. 设$f(x)$为正定二次函数，且假设在迭代过程中$(s^k - H^ky^k)^Ty^k > 0$对任意的k均满足，其中H^k由$SR1$产生的拟牛顿矩阵，证明：
$$H^ky^j = s^j, j = 0, 1, \cdots, k - 1.$$

6. 用DFP算法求解如下无约束优化问题：
$$minf(x) = x_1^2 + 4x_2^2$$

取$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \epsilon = 10^{-4}$.

7. 如果α_k由不精确线搜索的Wolfe-Powell准则产生，那么FR算法具有下降性质$g_k^T d_k < 0$.

8. 用FR共轭梯度法求解

$$minf(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$$

取初值点$x_0 = (0,0)^T$.