Homework 3

1. 对最小二乘问题
$$minf(x) = 1/2\sum_{i=1}^{2} r^2{}_i(x).$$
其中
$$r_1(x) = x_1^3 - x_2 - 1, r_2(x) = x_1^2 - x_2.$$
写出$J(x)$,$\nabla f(x), S(x)$.

2. 设d_i是方程组
$$\left(J^{\mathrm{T}}J + \nu_i I\right)d = -J^{\mathrm{T}}r \quad i = 1, 2$$
的解,其中$\nu_1 > \nu_2 > 0$.证明:$q\left(d_2\right) < q\left(d_1\right)$,其中$q(d) = \frac{1}{2}\|Jd + r\|^2$.

3. 求解非线性优化问题
$$\begin{cases} \min f(x) = x_1 - x_2^2 \\ \text{ s.t. } x_1 \geq 1, \end{cases}$$
的Kuhn-Tucker点,并验证该点是否为极小值点.

4. 叙述约束优化问题取严格极小值的二阶充分条件,并对于如下优化问题:
$$min \quad x_1^2 + x_2^2, \quad st.\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1.$$
求其严格局部极小点。

5. 假设可行点x^*是一般约束优化问题的局部极小点.证明:如果$f(x)$和$c_i(x)$,$i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$在点$x^*$ 处是可微的，那么($\mathcal{T}_x$表示可行方向构成的集合)
$$d^\top \nabla f(x^*) \geq 0, d \in \mathcal{T}_x(x^*),$$

。

等价于

$$\mathcal{T}_x(x^*) \cap \{d|\nabla f(x^*)^\top d < 0\} = \emptyset.$$

6. 将下列优化问题转换为无约束优化问题直接进行求解，同时用外罚函数法求解该约束优化问题

$$min f(x) = x_1 + x_2$$

$$s.t. c(x) = x_2 - x_1^2 = 0$$

7. 用对数障碍函数（采用自然对数）求解如下优化问题

$$min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$

$$s.t. c(x) = x_1 + x_2 - 1 \geq 0$$

8. 用增广拉格朗日函数方法求解

$$min f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$s.t. c(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

取$\lambda^1 = 1$，σ恒定取2.