一、**(10 分)**某水库的蓄水水平按每天 1000 单位的常数速率耗损。水库水源由随机发生的降雨补给。降雨按每天 0.2 的速率的泊松过程发生。由一次降雨加进水库的水量以概率 0.8 为 5000 单位，而以概率 0.2 为 8000 单位。现在的蓄水水平刚刚稍低于 5000 单位。请计算 10 天内水库始终都有水的概率。

解：令 $N(t)$ 为强度为 0.2 的泊松过程，Y_i 为第 i 次降雨的数量。根据题意，

水库存在缺水可能的情况为:

(1)前 5 天没有降雨；

(2)或者前 5 天只有一次降雨且降雨量只有 5000，并且后 5 天没有降雨。

则 10 天内水库存在缺水情况的概率为

P(10 天内水库存在缺水情况)

$$= P(N(5)=0)+P(N(5)=1, Y_1=5000, N(10)-N(5)=0)$$

$$= e^{-0.2\times 5}+\left((0.2\times 5)e^{-0.2\times 5}\right)\times 0.8\times e^{-0.2\times 5}$$

$$= e^{-1}+0.8\times e^{-2}$$

所以 10 天内水库始终都有水的概率为 $1-e^{-1}-0.8\times e^{-2}$。

二、**(10 分)**假设$N(t)$是一个更新过程，两次更新的时间间隔的概率分布函数为$F(x)$。$T_{N(t)}$表示t时刻之前最后一次更新发生的时间，$T_{N(t)+1}$表示t时刻之后的首次更新发生的时间，以$r(t)=T_{N(t)+1}-t$表示时刻t的剩余寿命，即从t开始到下次更新剩余的时间，令$\overline{R}_y(t)=P\{r(t)>y\}$。证明：$\overline{R}_y(t)=1-F(t+y)+\int_0^t[1-F(t+y-x)]dM(x)$，其中$M(x)$表示$N(t)$的更新函数。

教材：第 66 页，例 4.3.5。

三、**(10 分)**（产品保修策略）假设某产品一旦损坏，顾客立刻更换或者购买新的。设新产品成本为 2021 元，产品寿命为一个非负连续随机变量 X， X 的期望为 5 年。设某公司出售该商品采取如下更换策略：

(1) 产品售出后，若在期限 3 年内损坏，则免费更换，但免费更换时间不重新开始计时。

(2) 若在期限 3 年之后损坏，则按全价购买新产品，且免费更换时间重新开始计时。

令 $R(t)$ 表示 t 时刻公司对一个顾客的更换总成本，$t>0$，求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{E(R(t))}{t}$。

教材：第 68 页，例 4.4.1。

解：一方面付费更新的时刻 Y_1 等价于 w 时刻后的首次更换时刻，所以 $Y_1=T_{N(w)+1}=w+R_w$（R_w 指产品在 w 时刻的剩余寿命），由定理 4.4 Wald 等式知

$$E(Y_1)=E(T_{N(w)+1})=E(X)(E(N(w))+1)$$

另一方面，在一个成本更新周期里，公司对一个顾客的更换次数为 $E(N(w))+1$，因此所付成本为 $c(E(N(w))+1)$。

所以，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{E(R(t))}{t}=\dfrac{c}{E(X)}=\dfrac{c}{5}$。

四、**(10 分)**假设$\{X_n, n \geq 0\}$是一个不可约、非周期、正常返的 Markov 链，其状态空间为S，极限概率为$\{\pi_i, i \in S\}$。令$Y_n = (X_{n-1}, X_n), n \geq 1$，请给出$\{Y_n, n \geq 0\}$的转移概率，并计算$Y_n$的极限概率分布。(用$\{X_n, n \geq 0\}$的转移概率表达。)

解：

$$P_{(i,j)(k,l)} = P(X_n = k, X_{n+1} = l \mid X_{n-1} = i, X_n = j)$$

嘀$j \neq k$ ！$P_{(i,j)(k,l)} = 0$︶嘀$j = k$

$$P(X_n = j, X_{n+1} = l \mid X_{n-1} = i, X_n = j)$$

$$= P(X_{n+1} = l, X_{n-1} = i, X_n = j) / P(X_{n-1} = i, X_n = j)$$

$$= P(X_{n+1} = l \mid X_{n-1} = i, X_n = j) P(X_{n-1} = i, X_n = j) / P(X_{n-1} = i, X_n = j)$$

$$= P(X_{n+1} = l \mid X_{n-1} = i, X_n = j) = p_{jl}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Y_n = (i,j) \mid Y_1 = (k,l)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P\left(X_n = i, X_{n+1} = j \mid X_0 = k, X_1 = l\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) P\left(X_n = i \mid X_0 = k, X_1 = l\right)$$

$$= \pi_i p_{ij}$$

五、**(10 分)** 对于不可约非周期的有限状态马尔科夫链，令$\{\pi_j, j \in S\}$为其极限概率分布，其中S为状态空间。证明：$\{\pi_j, j \in S\}$是平稳分布，且是唯一的平稳分布。

教材：第 91 页，定理 5.3.3。

六、**(10 分)**（Doob 鞅）若$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$是任意随机变量序列，X为任意随机变量且$E(|X|)<\infty$。令$Z_n = E(X \mid Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$，证明：$\{Z_n\}$是关于$\{Y_n, n\geq 0\}$的一个鞅。

证明：（1）$Z_n = E(X \mid Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$是关于$\sigma(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$可测的。

（2）对任意的$n\geq 0$，

$$E\left(|Z_n|\right) = E[|E(X \mid Y_0,\ldots,Y_n)|] \leq E[E(|X| \mid Y_0,\ldots,Y_n)] = E(|X|) < \infty.$$

（条件期望的 Jansen 不等式）

（3）对任意的$n\geq 1$,

$$E(Z_{n+1} \mid Y_0,\ldots,Y_n) = E[E(X \mid Y_0,\ldots,Y_{n+1}) \mid Y_0,\ldots,Y_n] = E(X \mid Y_0,\ldots,Y_n) = Z_n$$

（条件期望的塔式法则）

七、**(10 分)**若$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$是任意随机变量序列，若对所有n， X_n是$Y_0,\cdots,Y_n$的函数，且$E(|X_n|)<+\infty$，令$Z_n=\sum_{i=0}^{n}[X_i-E(X_i|Y_0,\cdots,Y_{i-1})]$，其中约定$i=0$时，$E(X_i|Y_0,\cdots,Y_{i-1})=E(X_0)$。证明：$\{Z_n\}$是关于$\{Y_n, n\geq 0\}$的一个鞅。

证明：（1）$Z_n=\sum_{i=0}^{n}[X_i-E(X_i|Y_0,\cdots,Y_{i-1})]$是$Y_0,\cdots,Y_n$的函数。

（2）对任意的$n\geq 0$，

$$E\left(|Z_n|\right)=E(|\sum_{i=0}^{n}X_i-E(X_i|Y_0,\ldots,Y_{i-1})|) \leq \sum_{i=0}^{n}E(|X_i|)+\sum_{i=0}^{n}E(E(|X_i||Y_0,\ldots,Y_{i-1}))$$

$$=\sum_{i=0}^{n}E(|X_i|)+\sum_{i=0}^{n}E(|X_i|)<\infty.$$

（3）对任意的$n \geq 1$,

$$E(Z_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}) = E\left(\sum_{i=0}^{n} X_i - E(X_i \mid Y_0,\dots,Y_{i-1}) \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i - E(X_i \mid Y_0,\dots,Y_{i-1}) \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}\right) + E\left(X_n - E(X_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}) \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i - E(X_i \mid Y_0,\dots,Y_{i-1})\right) + E(X_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}) - E(X_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1})$$

$$= Z_{n-1}.$$

八、**(15 分)**假设$\{N(t), t \geq 0\}$为参数为λ的泊松过程，$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，两者相互独立。令$X(t) = (-1)^{N(t)} + B(t) - tB(1)$，$0 \leq t \leq 1$。当$0 \leq t < t+s \leq 1$时，计算$X(t)$的协方差函数$Cov(X(t), X(t+s))$。

解：因为 $E(-1)^{N(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}=e^{-\lambda s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda s)^n}{n!}=e^{-2\lambda s}$

所以

$$E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)}\right)=E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)+N(t)}\right)=E\left((-1)^{2N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)}\right)$$

$$=E(-1)^{N(t+s)-N(t)}=e^{-2\lambda s}$$

$$\therefore Cov((-1)^{N(t)},(-1)^{N(t+s)})=E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)}\right)-E(-1)^{N(t)}E(-1)^{N(t+s)}$$

$$=e^{-2\lambda s}-e^{-2\lambda t}e^{-2\lambda(t+s)}=e^{-2\lambda s}-e^{-2\lambda s}e^{-4\lambda t}$$

另一方面：

因为布朗桥的期望为 0，当 $0 \leq t < t+s \leq 1$ 时，协方差为

$$E(B^*(t)B^*(t+s)) = E[(B(t)-tB(1))(B(t+s)-(t+s)B(1))]$$

$$= E[(B(t)B(t+s)-tB(1)B(t+s)-(t+s)B(t)B(1)+t(t+s)B^2(1)]$$

$$= t-t(t+s) = t(1-t-s)$$

所以 $Cov(X(t), X(t+s)) = e^{-2\lambda s} - e^{-2\lambda s}e^{-4\lambda t} + t(1-t-s)$ 。

九、**(15 分)**设标准布朗运动为$\{B(t), t\ge 0\}$。假设市场上有两种风险资产，其价格分别为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，且 $X_1(t)$ 满足 $d(\ln X_1(t)) = 0.2dB(t)$，$X_2(t)$ 满足 $\dfrac{dX_2(t)}{X_2(t)} = 0.02dt + 0.2dB(t)$，$X_1(0) = X_2(0) = 1$。某人的初始财富为 1，他采用投入持有策略,即将财富的一半投在风险资产 $X_1(t)$ 中,剩下的一半投在风险资产 $X_2(t)$ 中，然后一直持有，不做任何其它交易。设他的财富过程为 $Y(t)$，求 $P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} Y(s) \ge e^{0.2}\right\}$。（请用标准正态分布函数表达）

$$\left(Y(t) = X_1(t) = e^{0.2B(t)}\right)$$

解：根据题意，

$$\because X_1(t)=X_2(t)$$

$$\therefore Y(t)=X_1(t)=e^{0.2B(t)},$$

则 $P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} e^{0.2B(s)}\ge e^{0.2}\right\}=P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} 0.2B(s)\ge 0.2\right\}$

$$=P\left\{\max_{0\le s\le t} B(s)\ge 1\right\}=P\{T_1\le t\}$$

$$=2P\{B(t)\ge 1\}=2(1-\Phi(\frac{1}{\sqrt{t}}))$$