2020 应用随机过程期末试题

一、**(10 分)**某水库的蓄水水平按每天 1000 单位的常数速率耗损。水库水源由随机发生的降雨补给。降雨按每天 0.2 的速率的泊松过程发生。由一次降雨加进水库的水量以概率 0.8 为 5000 单位，而以概率 0.2 为 8000 单位。现在的蓄水水平刚刚稍低于 5000 单位。请计算 10 天内水库始终都有水的概率。

二、**(10 分)**假设 $N(t)$ 是一个更新过程，两次更新的时间间隔的概率分布函数为 $F(x)$。$T_{N(t)}$ 表示 t 时刻之前最后一次更新发生的时间，$T_{N(t)+1}$ 表示 t 时刻之后的首次更新发生的时间，以 $r(t)=T_{N(t)+1}-t$ 表示时刻 t 的剩余寿命，即从 t 开始到下次更新剩余的时间，令 $\overline{R}_y(t)=P\left\{r(t)>y\right\}$。证明：$\overline{R}_y(t)=1-F(t+y)+\int_0^t[1-F(t+y-x)]dM(x)$，其中 $M(x)$ 表示 $N(t)$ 的更新函数。

三、**(10 分)**（产品保修策略）假设某产品一旦损坏，顾客立刻更换或者购买新的。设新产品成本为 2021 元，产品寿命为一个非负连续随机变量 X，X 的期望为 5 年。设某公司出售该商品采取如下更换策略：

(1) 产品售出后，若在期限 3 年内损坏，则免费更换，但免费更换时间不重新开始计时。

(2) 若在期限 3 年之后损坏，则按全价购买新产品，且免费更换时间重新开始计时。

令 $R(t)$ 表示 t 时刻公司对一个顾客的更换总成本，$t>0$，求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{E(R(t))}{t}$。

四、**(10 分)**假设 $\{X_n, n\ge 0\}$ 是一个不可约、非周期、正常返的 Markov 链，其状态空间为 S，极限概率为 $\{\pi_i, i\in S\}$。令 $Y_n=(X_{n-1},X_n), n\ge 1$，请给出 $\{Y_n, n\ge 0\}$ 的转移概率，并计算 Y_n 的极限概率分布。

五、**(10 分)** 对于不可约非周期的有限状态马尔科夫链，令 $\{\pi_j, j\in S\}$ 为其极限概率分布，其中 S 为状态空间。证明：$\{\pi_j, j\in S\}$ 是平稳分布，且是唯一的平稳分布。

六、**(10 分)**（Doob 鞅）若 $\left\{Y_n, n=0,1,\cdots\right\}$ 是任意随机变量序列，X 为任意随机变量且 $E(|X|)<\infty$。令 $Z_n=E(X\,|\,Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)$，证明：$\left\{Z_n\right\}$ 是关于 $\{Y_n, n\ge 0\}$ 的一个鞅。

七、**(10 分)**若 $\left\{Y_n, n=0,1,\cdots\right\}$ 是任意随机变量序列，若对所有 n，X_n 是 $Y_0,\cdots,Y_n$ 的函数，且 $E(|X_n|)<+\infty$，令 $Z_n=\sum\limits_{i=0}^{n}[X_i-E(X_i\,|\,Y_0,\cdots,Y_{i-1})]$，其中约定 $i=0$ 时，$E(X_i\,|\,Y_0,\cdots,Y_{i-1})=E(X_0)$。证明：$\left\{Z_n\right\}$ 是关于 $\{Y_n, n\ge 0\}$ 的一个鞅。

八、**(15 分)**假设 $\left\{N(t), t\ge 0\right\}$ 为参数为 λ 的泊松过程，$\left\{B(t), t\ge 0\right\}$ 为标准布朗运动，两者相互独立。令 $X(t)=(-1)^{N(t)}+B(t)-tB(1)$，$0\le t\le 1$。当 $0\le t<t+s\le 1$ 时，计算 $X(t)$ 的协方差函数 $Cov(X(t),X(t+s))$。

九、**(15 分)**设标准布朗运动为 $\left\{B(t), t\ge 0\right\}$。假设市场上有两种风险资产，其价格分别为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，且 $X_1(t)$ 满足 $d(\ln X_1(t))=0.2dB(t)$，$X_2(t)$ 满足 $\dfrac{dX_2(t)}{X_2(t)}=0.02dt+0.2dB(t)$，$X_1(0)=X_2(0)=1$。某人的初始财富为 1，他采用投入持有策略，即将财富的一半投在风险资产 $X_1(t)$ 中，剩下的一半投在风险资产 $X_2(t)$ 中，然后一直持有，不做任何其它交易。设他的财富过程为 $Y(t)$，求 $P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} Y(s)\ge e^{0.2}\right\}$。（请用标准正态分布函数表达）