一、**(10 分)**令$\{N(t), t \ge 0\}$是强度为λ的泊松过程，且与均值为μ和方差为σ^2的非负随机变量T相互独立，求$Cov(N(T+1), N(T))$。

解：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(N(T+1), N(T))\\&= E[N(T+1)N(T)] - E[N(T+1)]E[N(T)]\end{aligned}$$

而$E[N(T+1)] = E[E[N(T+1) \mid T]] = E[\lambda(T+1)] = \lambda(\mu+1)$， $E[N(T)] = \lambda\mu$

$$
\begin{aligned}
&E[N(T+1)N(T)] \\
&= E[E[N(T+1)N(T) \mid T]] \\
&= E[E[(N(T+1) - N(T) + N(T))N(T) \mid T]] \\
&= E[E[(N(T+1) - N(T))N(T) \mid T]] + E[E[N(T)^2 \mid T]] \\
&= E[E[N(T+1) - N(T)] \mid T]E[N(T) \mid T]] + E[\lambda T(\lambda T+1)] \\
&= E[\lambda^2 T] + + E[\lambda T(\lambda T+1)] \\
&= \lambda^2\mu + \lambda^2(\mu^2+\sigma^2) + \lambda\mu
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(N(T+1), N(T)) &= \lambda^2\mu + \lambda^2(\mu^2+\sigma^2) + \lambda\mu - \lambda(\mu+1)\lambda\mu \\
&= \lambda^2\sigma^2 + \lambda\mu
\end{aligned}
$$

二、**(10 分)** 乘客按照强度为λ的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 5 分钟将候车的乘客全部送走，为了尽可能缩短高峰期的候车时间，计划在两次发车时间中加发一班车（将候车乘客全部送走）。假设加车的时间为$t_0 \in (0,5)$，计算最优的加车时间，以及此时乘客的平均候车时间。

解：记S_i为第i个乘客到达时间，则 5 分钟内的累计等待时间为

$$\mathrm{w}(t_0) = \sum_{i=1}^{N(t_0)} [t_0 - S_i] + \sum_{i=N(t_0)+1}^{N(5)} [5 - S_i]$$

$$= t_0 N(t_0) + 5(N(5) - N(t_0)) - \sum_{i=1}^{N(5)} S_i$$

平均候车时间为

$$E[\mathrm{w}(t_0)] = t_0 E(N(t_0)) + 5E(N(5) - N(t_0)) - E(\sum_{i=1}^{N(5)} S_i)$$

$$= \lambda t_0{}^2 + 5\lambda(5 - t_0) - E(\sum_{i=1}^{N(5)} S_i)$$

$$= \lambda t_0{}^2 - 5\lambda t_0 + 25\lambda - E(\sum_{i=1}^{N(5)} S_i)$$

为了使平均候车时间最短，关于t_0求一阶导，得

$$t_0 = 2.5$$

此时平均候车时间为（其中U_i为$[0,5]$上的均匀分布）

$$E[\mathrm{w}(t_0)] = \lambda t_0{}^2 - 5\lambda t_0 + 25\lambda - E(\sum_{i=1}^{N(5)} S_i)$$

$$= 18.75\lambda - E[E[\sum_{i=1}^{N(5)} S_i \mid N(5)]]$$

$$= 18.75\lambda - E[E[\sum_{i=1}^{N(5)} U_i \mid N(5)]]$$

$$= 18.75\lambda - E[\frac{5}{2} N(5)]$$

$$= 18.75\lambda - 2.5 * 5\lambda$$

$$= 6.25\lambda$$

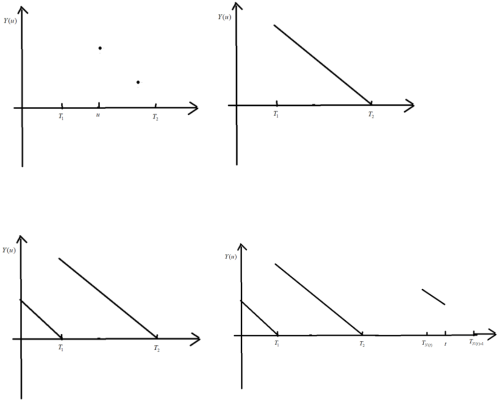
三、**(15 分)** $\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ 是一列独立同分布的非负随机变量，$\{N(t), t \geq 0\}$ 是更新间隔为 $\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ 的更新过程，时刻 t 的剩余寿命记为 $Y(t) = T_{N(t)+1} - t$，其中 $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。

（1）（7 分）证明 $\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2 \leq \frac{1}{t}\int_0^t Y(u)du \leq \frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2$；

（2）（8 分）基于更新回报定理，计算 $\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(u)du}{t}$（假设 X_i 有界）。

（1）由于 $\int_0^{T_{N(t)}} Y(u)du \le \int_0^t Y(u)du \le \int_0^{T_{N(t)+1}} Y(u)du$，而

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_{N(t)}} Y(u)du &= \sum_{i=1}^{N(t)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} Y(u)du \\
&= \sum_{i=1}^{N(t)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_{N(u)+1} - u)du \\
&= \sum_{i=1}^{N(t)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - u)du \\
&= \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{1}{2}(T_i - T_{i-1})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i^2
\end{aligned}$$



因此$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i^{\ 2} = \int_0^{T_{N(t)}} Y(u)du \le \int_0^t Y(u)du \le \int_0^{T_{N(t)+1}} Y(u)du = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i^{\ 2}$，结论得证。

1. 由更新回报定理

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2 = \frac{E[X_1^{\ 2}]}{2E[X_1]}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2 = \frac{E[X_1^{\ 2}]}{2E[X_1]} + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}X_{N(t)+1}^2 = \frac{E[X_1^{\ 2}]}{2E[X_1]}$$

因此$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(u)du}{t} = \frac{E[X_1^{\ 2}]}{2E[X_1]}$

四、**(15 分)** （1）（5 分）假设一个坛子中有 N $(N>2)$ 个球，有些是白球，有些是黑球。另有一枚硬币，每次抛掷时出现正面的概率为 p $(0<p<1)$。若出现正面，则从坛子中随机地取一个球并用一个白球来替换；若出现反面，则从坛子中随机地取一个球并用一个黑球来替换。令 X_n 表示第 n 次抛掷硬币后坛子中的白球个数。如果用 Markov 链模型来描述 $\{X_n, n\geq 0\}$，请写出 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的转移概率。

（2）（10 分）假设一个容量无限的坛子，若每次抛掷硬币时出现正面，则从坛子中取走一个白球，若出现反面，则加一个白球。如果坛子里面没有球，则继续抛硬币。假设当前坛子里只有 1 个白球，设 Y 为坛子再次只有 1 个白球时的硬币抛掷次数。若 $p=1/5$，请计算 Y 的期望。

解：（1）转移概率为：$p_{i,i+1}=p\dfrac{N-i}{N}$ ！ $i=0,1,\cdots,N-1$

$$p_{i,i-1}=(1-p)\frac{i}{N},\quad i=1,2,\cdots,N$$

$$p_{i,i}=p\frac{i}{N}+(1-p)\frac{(N-i)}{N},\quad i=0,1,\cdots,N$$

（2）**知识点：平稳分布的计算；平稳分布与平均返回步数的关系** $\mu=\dfrac{1}{\pi}$。

□︹(□︹彼啮表□p蟾镰仔□雯□□劣□□□□ !蓖蟾□□表□1/5.)
尚柄镰仔□雯□□蟾蓖料□ !□玛蟠□Markov□ !枦抽朽鳝鸿柄□菡□□□
彡□锗屎孽崩□薏□技荥π !

□□

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij},\ j\in S\ \text{︹}\ \sum_{i\in S}\pi_i=1\text{Y}$$

辣踔

$$\begin{cases} \pi_0 = q\pi_0 + q\pi_1, \\ \cdots\cdots \\ \pi_j = \pi_{j-1}p_{j-1,j} + \pi_{j+1}p_{j+1,j} = \pi_{j-1}\cdot p + \pi_{j+1}\cdot q, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{p}{q}\pi_0 \\ \pi_2 = (\dfrac{p}{q})^2 \pi_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \pi_j = (\dfrac{p}{q})^j \pi_0, \end{cases}$$

栌抽$\sum_{j\in S}\pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{p}{q})^j = 1$, 枷$\pi_0 = 1 - \frac{p}{q}$,

因为随机游走的右走概率为$4/5$,上式不收敛，即各状态为非常返态或零常返。

栌抽$\mu_1 = \infty$。

五、**(15 分)** 假设有 N 台机器，每台机器的使用寿命相互独立且都服从参数为 μ 的指数分布。设 $X(t)$ 表示在 t 时刻能使用的机器台数。

（1）（7 分）证明：在 t 时刻有 j 台机器能使用的条件下，时间 $(t, t+\Delta t)$ 内有一台机器不能使用的概率为 $j\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$；

（2）（8 分）假定机器不能使用时就立即进行维修，每台机器的维修时间相互独立且服从为参数为 m 的指数分布，维修时间与使用寿命也相互独立。请写出 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的转移强度矩阵 Q。

解：（1）证明：$P(X(t+\Delta t)-X(t)=-1\,|\,X(t)=j)=C_j^1 p(1-p)^{j-1}$

其中 $p=P(N(t+\Delta t)-N(t)=1\,|\,N(t)=0)=\mu\Delta t+o(\Delta t)$， $N(t)$ 表示一个泊松过程。因此

$P(X(t+\Delta t)-X(t)=-1\,|\,X(t)=j)=j\mu\Delta t+o(\Delta t)$ 。

（2）

□蜉□□□□蜉□$Markov$□$\{X(t),t\geq 0\}$□□:

$$p_{i,i+1}(\Delta t)=(N-i)\mu\Delta t+o(\Delta t);\ \ i=0,1,2,....,N-1$$

$$p_{i,i-1}(\Delta t)=i\mu\Delta t+o(\Delta t);i=1,2,....,N$$

$$p_{ii}(\Delta t)=1-(i\mu+(N-i)\mu)\Delta t+o(\Delta t)=1-N\mu\Delta t+o(\Delta t);i=0,1,2,....,N$$

$$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\quad |i-j|\geq 2.$$

因此相应的 Q 矩阵为

$$
Q=\begin{pmatrix}
-N\mu & N\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mu & -N\mu & (N-1)\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -N\mu & (N-2)\mu & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & (N-2)\mu & -N\mu & 2\mu & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & (N-1)\mu & -N\mu & \mu \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N\mu & -N\mu
\end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}
$$

六、**(17 分)** 假设随机过程$\left\{M_n, n=0,1,2,\cdots\right\}$是一个鞅，且$M_0=0$。令

$X_i=M_i-M_{i-1}$，$i=1,2,\cdots$，则有$M_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，$n \geq 1$。（注意：X_i之间不一定相互独立。）

（1）（7 分）证明：$Var(M_n)=\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$，$n \geq 1$；

（2）（10 分）如果进一步假设序列$\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$独立同分布，且$Var(X_i)=\sigma^2$，证明：随机过程$\left\{M_n^2-n\sigma^2, n=0,1,2,\cdots\right\}$关于$\left\{M_n, n=0,1,2,\cdots\right\}$是鞅。

解答：（1）因为随机过程$\{M_n, n=0,1,2,\cdots\}$是鞅，我们有对任意$n\geq 1$，有

$E[X_n]=E[M_n]-E[M_{n-1}]=0$且$E[M_n]=0$. 此外，对任意的$j>i$，我们有：

$$\begin{aligned} E[X_iX_j] &= E[E[(M_i-M_{i-1})(M_j-M_{j-1})|M_1,M_2,\cdots,M_{j-1}]] \\ &= E[(M_i-M_{i-1})E[M_j-M_{j-1}|M_1,M_2,\cdots,M_{j-1}]]=0. \end{aligned}$$

所以，$cov(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=0,\ i\neq j$. 另外，

$$Var[M_n]=E[(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i^2]+\sum_{i\neq j}cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}Var[X_i].$$

（2）1. $\{M_n^2 - n\sigma^2, n = 1,2,\cdots\}$关于$\{M_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是适应的。

2. $E[|M_n^2 - n\sigma^2|] \le E[M_n^2] + n\sigma^2 = 2n\sigma^2 < \infty.$

3. 此外，

$$E[M_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 | M_1, M_2, \cdots, M_n] = E[(M_n + X_{n+1})^2 | M_1, M_2, \cdots, M_n] - (n+1)\sigma^2$$

$$= M_n^2 + 2M_n E[X_{n+1} | M_1, M_2, \cdots, M_n] + E[X_{n+1}^2 | M_1, M_2, \cdots, M_n] - (n + 1)\sigma^2$$

$$= M_n^2 + 2M_n E[X_{n+1}] + E[X_{n+1}^2] - (n+1)\sigma^2$$

$$= M_n^2 + \sigma^2 - (n+1)\sigma^2 = M_n^2 - n\sigma^2.$$

七、**(18 分)** 随机过程 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是一个标准布朗运动，$T_x = \inf\{t : B_t = x, t \geq 0\}$ 为首达时，则对任意的 $t > s > 0$，

（1）（4 分）计算$Var(B_t \mid B_s = 1)$；

（2）（7 分）计算$Var(B_s \mid B_t = 1)$；（提示：利用条件分布）

（3）（7 分）推导首达时T_x的分布，并计算$P\left\{\max_{s \le v \le t} B_v > 1\right\}$（计算结果请用标准正态分布函数表达）。

解答：(1)

$\because B(t) = B(s) + (B(t) - B(s))$

$\therefore B(t) \mid B(s) = 1$蔽$1 + (B(t) - B(s))$领技荥

$\therefore Var(B(t) \mid B(s) = 1) = Var(B(t) - B(s)) = t - s$

(2) 嘀$0 < s < t$蜉

$$\begin{pmatrix} B(s) \\ B(t) \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & s \\ ! & \\ s & t \end{pmatrix}),$$

$$corr(B(s),B(t)) = \frac{Cov(B(s),B(t))}{\sqrt{st}} = (\frac{s}{t})^{1/2}$$

正态分布性质

正态分布的条件分布仍为正态分布

事实上 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]}$$

$$f_{X|Y}(x|y)\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

同理，

$$f_{Y|X}(y|x)\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

$\because \sigma_1^2(1-\rho^2)=s(1-\frac{s}{t})$

$\therefore Var(B(s)\mid B(t)=1)=Var(B(t)-B(s))=\frac{s(t-s)}{t}$

【或

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=\mathcal{N}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)}{\sqrt{(2\pi)^n|\boldsymbol{\Sigma}|}}$$

条件方差为$\therefore |\Sigma|/\sigma_2=\frac{\begin{vmatrix} s & s \\ s & t \end{vmatrix}}{t}=\frac{st-s^2}{t}$。】

【实际上，

$$\because \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_1) = (\frac{s}{t})^{1/2} \frac{s^{1/2}}{t^{1/2}} 1 = \frac{s}{t},$$

$$\sigma_1^2 (1 - \rho^2) = s(1 - \frac{s}{t})$$

$$\therefore B(s) \mid B(t) = 1 \sim N(\frac{s}{t}, s(1 - \frac{s}{t}))$$

】

(3)

$$P\left\{T_x \le t\right\} = 2P\left\{B(t) \ge x\right\} = 2(1 - P\left\{B(t) < x\right\})$$

$$= 2(1 - P\left\{B(t)/\sqrt{t} < x/\sqrt{t}\right\})$$

$$= 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))$$

另外，$P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$，

其中 $f_{B(s)}(y) = \frac{1}{s}\phi(\frac{y}{\sqrt{s}})$。

$$P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= \int_1^\infty f_{B(s)}(y)dy + \int_{-\infty}^1 P\left\{\max_{s\le v\le t} B(v) > 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= 1 - P(B(s) > 1) + \int_{-\infty}^1 P\left\{\max_{0\le v\le t-s} B(v) > 1 - y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= 1 - P(B(s) > 1) + \int_{-\infty}^1 P(T_{1-y} \le t-s) f_{B(s)}(y)dy$$

End