2021 《随机过程》期末试题（A 卷）

（卷面总分 100 分。）

题目编号	得分
一	
二	
三	
四	
五	
六	
七	
合计	

一、**(10 分)**令$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，且与均值为μ和方差为σ^2的非负随机变量T相互独立，求$Cov(N(T+1),N(T))$。

二、**(10 分)** 乘客按照强度为λ的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 5 分钟将候车的乘客全部送走，为了尽可能缩短高峰期的候车时间，计划在两次发车时间中加发一班车（将候车乘客全部送走）。假设加车的时间为$t_0\in(0,5)$，计算最优的加车时间，以及此时乘客的平均候车时间。

三、**(15 分)** $\{X_1,X_2,X_3,\cdots\}$是一列独立同分布的非负随机变量，$\{N(t),t\geq 0\}$是更新间隔为$\{X_1,X_2,X_3,\cdots\}$的更新过程，时刻t的剩余寿命记为$Y(t)=T_{N(t)+1}-t$，其中$T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。

（1）（7 分）证明$\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)}X_n^2\leq\frac{1}{t}\int_0^t Y(u)du\leq\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)+1}X_n^2$；

（2）（8 分）基于更新回报定理，计算$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(u)du}{t}$（假设$X_i$有界）。

四、**(15 分)** （1）（5 分）假设一个坛子中有N $(N>2)$个球，有些是白球，有些是黑球。另有一枚硬币，每次抛掷时出现正面的概率为p $(0<p<1)$。若出现正面，则从坛子中随机地取一个球并用一个白球来替换；若出现反面，则从坛子中随机地取一个球并用一个黑球来替换。令X_n表示第n次抛掷硬币后坛子中的白球个数。如果用 Markov 链模型来描述$\{X_n,n\geq 0\}$，请写出$\{X_n,n\geq 0\}$的转移概率。

（2）（10 分）假设一个容量无限的坛子，若每次抛掷硬币时出现正面，则从坛子中取走一个白球，若出现反面，则加一个白球。如果坛子里面没有球，则继续抛硬币。假设当前坛子里只有 1 个白球，设Y为坛子再次只有 1 个白球时的硬币抛掷次数。若$p=1/5$，请计算Y的期望。

五、**(15 分)** 假设有N台机器，每台机器的使用寿命相互独立且都服从参数为μ的指数分布。设$X(t)$表示在t时刻能使用的机器台数。

（1）（7 分）证明：在t时刻有j台机器能使用的条件下，时间$(t,t+\Delta t)$内有一台机器不能使用的概率为$j\mu\cdot\Delta t+o(\Delta t)$；

（2）（8 分）假定机器不能使用时就立即进行维修，每台机器的维修时间相互独立且服从为参数为μ的指数分布，维修时间与使用寿命也相互独立。请写出 Markov 链$\{X(t),t\geq 0\}$的转移强度矩阵Q。

六、**(17 分)** 假设随机过程$\left\{M_n, n=0,1,2,\cdots\right\}$是一个鞅，且$M_0=0$。令$X_i=M_i-M_{i-1}$，$i=1,2,\cdots$，则有$M_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$n\geq 1$。（注意：$X_i$之间不一定相互独立。）

（1）（7 分）证明：$Var(M_n)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$，$n\geq 1$；

（2）（10 分）如果进一步假设序列$\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$独立同分布，且$Var(X_i)=\sigma^2$，证明：随机过程$\left\{M_n-n\sigma^2, n=0,1,2,\cdots\right\}$关于$\left\{M_n, n=0,1,2,\cdots\right\}$是鞅。

七、**(18 分)** 随机过程$\left\{B_t, t\geq 0\right\}$是一个标准布朗运动，$T_x=\inf\left\{t: B_t=x, t\geq 0\right\}$为首达时，则对任意的$t>s>0$以及常数$a$，

（1）（4 分）计算$Var(B_t \mid B_s=a)$；

（2）（7 分）计算$Var(B_s \mid B_t=a)$；（提示：利用条件分布）

（3）（7 分）推导首达时T_x的分布，并计算$P\left\{\max_{s\leq v\leq t} B_v > a\right\}$（计算结果请用标准正态分布函数表达）。