一、**(10 分)** 假设某种意外事故的发生次数受某种随机因素影响，并且事故的发生次数可以用条件泊松过程 $N(t)$ 来刻画，即假设随机因素为一个随机变量 Λ，在 $\Lambda=\lambda$ 的条件下，过程 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程。若 Λ 的期望和方差分别为 $E(\Lambda)=a$，$Var(\Lambda)=b^2$，请计算 $Cov(N(1), N(2))$。

解： 因为 $E(N(t))=tE(\Lambda)=at$，

$$E(N(1)N(2)) = E\left(E(N(1)N(2)\,|\,\Lambda)\right)$$

$$= E\left(E(N(1)\left(N(2)-N(1)\right)+N^2(1)\,|\,\Lambda)\right)$$

$$= E\Big(E(N(1)\big(N(2)-N(1)\big)\mid\Lambda)+E(N^2(1)\mid\Lambda)\Big)$$

$$= E\Big(E(N(1)\mid\Lambda)\cdot E\big(N(2)-N(1)\mid\Lambda\big)\Big)+E(\Lambda+\Lambda^2)$$

$$= E(\Lambda^2)+E(\Lambda+\Lambda^2)$$

$$= 2Var(\Lambda)+2E^2(\Lambda)+E(\Lambda)$$

$$= 2b^2+2a^2+a$$

$$\therefore Cov(N(1),N(2)) = E(N(1)N(2)) - E(N(1))E(N(2))$$

$$= 2b^2+2a^2+a-a\cdot 2a$$

$$= 2b^2+a$$

二、**(10 分)** 乘客按照强度为$\lambda=100$（人/小时）的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 15 分钟将候车的乘客全部送走。假设每位乘客等待时间不超过 10 分钟，就没有等待成本；反之，其等待时间超过 10 分钟，则有等待成本 c。请计算一次发车乘客的总等待成本的期望。

解：

解一：直观上只有前 5 分钟达到的乘客有等待成本，而前 5 分钟达到的乘客数量为$E(N(\frac{5}{60}))=100\times\frac{1}{12}=\frac{25}{3}$，所以成本为$\frac{25c}{3}$。

解二：令 T_i 为第 i 个乘客的到达时间，则一次发车乘客的总等待成本的期望为

$$\underline{E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} cI_{\{t-T_i>10\}}\right)}$$ （这里 $t=15$ ）。

因为**根据定理 3.2.3**，

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} cI_{\{t-T_i>10\}} \mid N(t)=n\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n} cI_{\{t-U_{(i)}>10\}} \mid N(t)=n\right)$$

$$=E\left(\sum_{i=1}^{n} cI_{\{t-U_i>10\}} \mid N(t)=n\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} cE(I_{\{t-U_i>10\}})$$

$$=ncP\{U_i<t-10\}$$

$$=nc\frac{t-10}{t}$$

其中$\dfrac{t-10}{t}=\dfrac{5}{15}=1/3$。

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} cI_{\{t-T_i>a\}}\right)=\frac{c}{3}E(N(t))=\frac{c\lambda t}{3}=\frac{100\times 1/4\times c}{3}=\frac{25c}{3}$$。

三、**(15 分)** 假设随机向量列$\{(Z_n, Y_n), n \geq 1\}$是独立同分布的，从而$\{Z_n\}$，$\{Y_n\}$都是独立同分布，但Z_i和Y_i之间允许不独立。假设H是Z_n的分布，G是Y_n的分布，F是$Z_n + Y_n$的分布，且这些分布都是连续分布。假设$\{Z_n\}$表示系统是开着的时间，记$P(t) = P\{t\text{ 时刻系统是开的}\}$，设$E(Y_n + Z_n) < \infty$，证明：$\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \dfrac{E(Z_1)}{E(Z_1) + E(Y_1)}$。

<u>教材定理 4.4.2</u>.

证明：令 $X_1=Z_1+Y_1$ 对第一次更新的时刻取条件概率得

$$P\{t\text{ 时刻系统是开着 }|X_1=x\}=\begin{cases}P\{Z_1>t\,|\,X_1=x\}, & x\ge t\\ P(t-x), & x<t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P(t)&=\int_0^{+\infty}P\{t\text{ 时刻系统是开着 }|X_1=x\}dF(x)\\&=\int_t^{+\infty}P(Z_1>t\,|\,X_1=x)dF(x)+\int_0^t P(t-x)dF(x)\\&=P(Z_1>t,X_1>t)+\int_0^t P(t-x)dF(x)\qquad\text{（全概率公式）}\\&=P(Z_1>t)+\int_0^t P(t-x)dF(x)\\&=\overline{H}(t)+\int_0^t P(t-x)dF(x)\end{aligned}$$

根据定理 4.2.2 可得更新方程的解：为

$$P(t)=\overline{H}(t)+\int_0^t\overline{H}(t-x)dM(x)$$

又 $\int_0^{+\infty}\overline{H}(t)dt=E(Z_1)<+\infty$**，且显然** $\overline{H}(t)$ **非负不增，**

由关键更新定理得

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\frac{\int_0^{+\infty}\overline{H}(t)dt}{E(Y_1+Z_1)}=\frac{E(Z_1)}{E(Z_1)+E(Y_1)}$$

四、**(5 分)** 证明：如果状态 i 是常返的，且状态 i 与状态 j 互通，则 j 是常返的。

<u>**教材定理 5.2.4**</u>.

证：因为状态 i 与状态 j 互通，则存在 m、n 使得 $P_{ij}^{(m)} > 0, P_{ji}^{(n)} > 0$. 所以对任意 $s \geq 0$，有

$$P_{jj}^{(m+n+s)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)},$$

从而

$$\sum_s P_{jj}^{(m+n+s)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_s P_{ii}^{(s)} = \infty,$$

即 j 是常返的.

五、**(15 分)** 一个盒子里总是有两个球，球的颜色是红色和蓝色。在每个阶段，随机选择一个球，然后用一个新的球替换，替换为相同颜色的球的概率为 0.6，替换为相反颜色的球的概率为 0.4。如果最初两个球都是红色的，设 X_n 定义为在第 n 次选择和随后的替换之后，盒子中红色球的数量，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是马尔可夫链。

(1) 求转移概率矩阵；

(2) 求极限概率；

(3) 求选定的第三个球是红色的概率。

解：

(1) $P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$.

(2) 极限概率满足如下方程组

$$\begin{cases}\pi_1=0.6\pi_1+0.2\pi_2\\ \pi_2=0.4\pi_1+0.6\pi_2+0.4\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases},$$

解得 $\pi_1=0.25$，$\pi_2=0.5$，$\pi_3=0.25$.

(2) $P^2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.48 & 0.08 \\ 0.24 & 0.52 & 0.24 \\ 0.08 & 0.48 & 0.44 \end{pmatrix}$,

$$P(\text{第三个球是红的}) = \sum_{i=0}^{2} P(\text{第三个球是红的}|X_2 = i\ )P(X_2 = i|X_0 = 2\ )$$

$$= 0 + 0.5P_{2,1}^2 + 1 * P_{2,2}^2 = 0.5 * 0.48 + 0.44 = 0.68\ .$$

六、**(10 分)** 潜在顾客到达加油站，且到达服从参数为 8 的泊松分布。然而，只有在加油站有不超过两辆车（包括目前正在加油的车辆）的情况下，顾客才会进入加油站加油。假设为一辆汽车加油所需的时间服从参数为 2 的指数分布，试求：

(1) 员工给汽车加油的时间比例；

(2) 潜在顾客流失的比例。

解：设在加油站的顾客的数量为马尔可夫链的状态，$I = \{0,1,2,3\}$.

这是一个生灭过程， $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 8$，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$，因此

$$\begin{cases} P_1 = 4P_0 \\ P_2 = 16P_0 \\ P_3 = 64P_0 \\ \sum_{i=0}^{3} P_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0 = \frac{1}{85} \\ P_1 = \frac{4}{85} \\ P_2 = \frac{16}{85} \\ P_3 = \frac{64}{85} \end{cases}.$$

(a) 员工给汽车加油的时间比例为：$1 - P_0 = \frac{84}{85}$.

(b) 潜在顾客流失的比例为：$P_3 = \frac{64}{85}$.

七、**(18 分)** 考虑一个在整数上的随机游走模型，设每次向右移动一步的概率 $p<\frac{1}{2}$，向左移动一步的概率为 $1-p$，S_n表示时刻 n 质点所处的位置，假定 $S_0=a(0<a<N)$ 。

(1) 证明: $\left\{M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right\}$ 是关于$\{S_n\}$的鞅;

(2) 令$T=\min\{n:\ S_n=0$ 或 $N\}$，即T表示随机游走第一次到达 0 或 N 的时刻。假设T满足鞅的停时定理，请利用鞅的停时定理，计算$P(S_T=0)$。

教材：习题 6.4，答案第 235 页至第 236 页。

八、**(17 分)** 随机过程 $\left\{B(t),t\geq 0\right\}$ 是一个标准布朗运动，$T_x=\inf\left\{t:B(t)=x,t\geq 0\right\}$ 为首达时。

(1) 计算二维随机变量 $(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t, B(1))$ 的协方差矩阵；

(2) 给定 $0<u<v<x$，计算条件概率 $P\{u<B(t)<v\,|\,T_x<t\}$（计算结果用标准正态分布的分布函数表示）。

解：

（1）$Var[B(1)]=1,$

$$Var[\int_0^1 B(t)dt]=E[\int_0^1 B(t)dt\cdot\int_0^1 B(s)ds]=E\left[\int_0^1\int_0^1 B(t)B(s)dtds\right]$$

$$=\int_0^1\int_0^1 E[B(t)B(s)]dtds=\int_0^1\int_0^1 \min(s,t)dtds$$

$$=2\int_0^1\int_0^s tdtds \;=\frac{1}{3},$$

$$Cov(\int_0^1 B(t)dt,B(1))=E[\int_0^1 B(t)dt\cdot B(1)]=E[\int_0^1 B(t)B(1)dt]$$

$$=\int_0^1 E[B(t)B(1)]dt=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2},$$

因此$(\int_0^1 B(t)dt,B(1))$的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$。

(2) $P\left\{u<B(t)<v \mid T_x<t\right\}=\dfrac{P\left[u<B(t)<v, T_x<t\right]}{P\left[T_x<t\right]}$

根据对称性，

$$P\left[T_x<t\right]=2P\left[B(t)>x\right]=2[1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})]$$

$$P\left[u<B(t)<v, T_x<t\right]=P[2x-v<B(t)<2x-u]=\Phi(\frac{2x-u}{\sqrt{t}})-\Phi(\frac{2x-v}{\sqrt{t}})$$

因此$P\left\{u<B(t)<v \mid T_x<t\right\}=\dfrac{\Phi(\frac{2x-u}{\sqrt{t}})-\Phi(\frac{2x-v}{\sqrt{t}})}{2[1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})]}$。