学号 ______________ **姓名** _______________

2022 《随机过程》期末试题（A 卷）

（卷面总分 100 分。）

一、**(10 分)** 假设某种意外事故的发生次数受某种随机因素影响，并且事故的发生次数可以用条件泊松过程 $N(t)$ 来刻画，即假设随机因素为一个随机变量 Λ，在 $\Lambda=\lambda$ 的条件下，过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程。若 Λ 的期望和方差分别为 $E(\Lambda)=a$，$Var(\Lambda)=b^2$，请计算 $Cov(N(1),N(2))$。

二、**(10 分)** 乘客按照强度为 $\lambda=100$（人/小时）的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 15 分钟将候车的乘客全部送走。假设每位乘客等待时间不超过 10 分钟，就没有等待成本；反之，其等待时间超过 10 分钟，则有等待成本 c。请计算一次发车乘客的总等待成本的期望。

三、**(15 分)** 假设随机向量列 $\{(Z_n,Y_n),n\geq 1\}$ 是独立同分布的，从而 $\{Z_n\}$，$\{Y_n\}$ 都是独立同分布，但 Z_i 和 Y_i 之间允许不独立。假设 H 是 Z_n 的分布，G 是 Y_n 的分布，F 是 Z_n+Y_n 的分布，且这些分布都是连续分布。假设 $\{Z_n\}$ 表示系统是开着的时间，记 $P(t)=P\{t\ \text{时刻系统是开的}\}$，设 $E(Y_n+Z_n)<\infty$，证明：$\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\dfrac{E(Z_1)}{E(Z_1)+E(Y_1)}$。

四、**(5 分)** 证明: 如果状态 i 是常返的，且状态 i 与状态 j 互通，则 j 是常返的。

五、**(15 分)** 一个盒子里总是有两个球，球的颜色是红色和蓝色。在每个阶段，随机选择一个球，然后用一个新的球替换，替换为相同颜色的球的概率为 0.6，替换为相反颜色的球的概率为 0.4。如果最初两个球都是红色的，设 X_n 定义为在第 n 次选择和随后的替换之后，盒子中红色球的数量，则 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 是马尔可夫链。

(1) 求转移概率矩阵；

(2) 求极限概率；

(3) 求选定的第三个球是红色的概率。

六、**(10 分)** 潜在顾客到达加油站，且到达服从参数为 8 的泊松分布。然而，只有在加油站有不超过两辆车（包括目前正在加油的车辆）的情况下，顾客才会进入加油站加油。假设为一辆汽车加油所需的时间服从参数为 2 的指数分布，试求：

(1) 员工给汽车加油的时间比例；

(2) 潜在顾客流失的比例。

七、**(18 分)** 考虑一个在整数上的随机游走模型，设每次向右移动一步的概率 $p<\frac{1}{2}$，向左移动一步的概率为 $1-p$，S_n表示时刻 n 质点所处的位置，假定 $S_0=a(0<a<N)$。

(1) 证明: $\left\{M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right\}$ 是关于$\{S_n\}$的鞅；

(2) 令$T=\min\{n\text{:}\ S_n=0\ \text{或}\ N\}$，即$T$表示随机游走第一次到达 0 或 N 的时刻。假设T满足鞅的停时定理，请利用鞅的停时定理，计算$P(S_T=0)$。

八、**(17 分)** 随机过程$\{B(t),t\geq 0\}$是一个标准布朗运动，$T_x=\inf\{t:B(t)=x,t\geq 0\}$为首达时。

(1) 计算二维随机变量$(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t,B(1))$的协方差矩阵；

(2) 给定$0<u<v<x$，计算条件概率$P\{u<B(t)<v\,|\,T_x<t\}$（计算结果用标准正态分布的分布函数表示）。