一、(10 分) 某水库的蓄水水平以每天 1000 单位的常数速率耗损。水库水源由随机发生的降雨补给：降雨的次数按每天 0.5 的速率的泊松过程发生，由一次降雨加进水库的水量以概率 0.6 为 4000 单位，而以概率 0.4 为 6000 单位。现在的蓄水水平刚刚稍低于 4000 单位。请计算 8 天内水库始终都有水的概率。

解：令 $N(t)$ 为强度为 0.5 的泊松过程，Y_i 为第 i 次降雨的数量。根据题意，**水库存在缺水可能的情况为:**

(1)前 4 天没有降雨；

(2)或者前 4 天只有一次降雨且降雨量只有 4000，并且后 4 天没有降雨。

则 8 天内水库存在缺水情况的概率为

P(8 天内水库存在缺水情况)

$$= P(N(4)=0)+P(N(4)=1, Y_1=4000, N(8)-N(4)=0)$$

$$=e^{-0.5\times4}+\left((0.5\times4)e^{-0.5\times4}\right)\times0.6\times e^{-0.5\times4}$$

$$=e^{-2}+1.2\times e^{-4}$$

所以 8 天内水库始终都有水的概率为$1-e^{-2}-1.2\times e^{-4}$

二、**(10 分)** 设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，T_i 表示第 i 次 $(i = 1,2,\cdots)$事件发生的时刻，计算

(1) T_1和T_2的联合概率密度函数；

(2) 条件概率 $P(T_1 < 1, T_2 < 3 \mid N(4) = 2)$。

解：(1) $T_1 = X_1, T_2 = X_1 + X_2$

X_1和X_2 的联合密度函数为

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \lambda^2 \exp(-\lambda x_1 - \lambda x_2), x_1 > 0, x_2 > 0$$

因此T_1和T_2的联合密度函数为

$$f_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = \lambda^2 \exp(-\lambda t_2), t_2 > t_1 > 0$$

(2) 解法一：

$$P(T_1<1,T_2<3\mid N(4)=2)$$

$$=P(U_{(1)}<1,U_{(2)}<3)$$

其中$U_{(1)}$和$U_{(2)}$是[0, 4]上独立均匀分布U_1和U_2的顺序统计量

$$P(U_{(1)}<1,U_{(2)}<3)$$

$$=P(U_1<3,U_2<3)-P(1<U_1<3,1<U_2<3)$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{4}\right)^2$$

$$=\frac{5}{16}$$

解法二：

$$P(T_1<1,T_2<3\mid N(4)=2)$$

$$=\int_0^1\int_{t_1}^3\frac{2!}{4^2}dt_1dt_2$$

$$=\frac{5}{16}$$

三、**(15 分)** 假设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个更新过程，其更新的时间间隔为X_i，X_i的分布函数为F，期望为μ，T_i表示第 i 次（$i = 1,2,\cdots$）更新发生的时刻，以$r(t) = T_{N(t)+1} - t$表示时刻t的剩余寿命，计算$P(r(t) > y)$以及$\lim_{t\to\infty} P(r(t) > y)$，$y > 0$。

教材例 4.3.5.

四、**(5 分)** 在离散时间马尔科夫链中，如果状态i和j互通，证明状态i和j的周期相等。

教材定理 5.2.2.

五、**(15 分)** 设有 6 个球 (其中 2 个红球， 4 个白球）分放于甲、乙两个盒子中，每盒放 3 个，每次从两个盒中各任取一球并进行交换，以 X_0 表示开始时甲盒中红球的个数, X_n $(n \geq 1)$ 表示经过 n 次交换后甲盒中的红球数。

(1) 计算该马尔可夫链$\{X_n,\ n \geq 1\}$的转移概率矩阵P；

(2) 证明该马尔可夫链$\{X_n,\ n \geq 1\}$是遍历链；

(3) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

解：(1) 转移概率矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(2) 不可约，非周期，有限维，因此全为正常返，为遍历链。

(3)平稳分布

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

解得$\pi_1=\frac{1}{5}$，$\pi_2=\frac{3}{5}$，$\pi_3=\frac{1}{5}$

因此P^n的极限为（$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^n=\pi_j$）

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

六、**(10 分)** 一个人群中共有 N 个个体，其中一些成员受病毒感染，其传播方式如下：群体中的两个成员之间按速率为 λ 的泊松过程接触，每一次接触等可能地涉及在总体中的 $\binom{N}{2}$ 对成员中的任意一对。如果一次接触涉及一个受感染的与一个没有受感染的成员，那么没有感染者将变成受感染者，一旦受到感染，该成员始终保持受感染。以 $X(t)$ 表示群体在时刻 t 受感染成员的个数。

(1) 请写出 Markov 链$\{X(t), \mathrm{t} \geq 0\}$的转移速率矩阵$Q$；

(2) 假定受感染成员在感染后立即服药，每个成员的治愈时间相互独立且服从参数为 μ 的指数分布，治愈时间与感染相互独立，请写出 Markov 链$\{X(t), t \geq 0\}$的转移速率矩阵Q。

$$(1) P(X(t+h)=i+1 \mid X(t)=i)=\lambda h\times\frac{i(N-i)}{C_N^2}+o(h)$$

因而$q_{i,i+1}=\dfrac{\lambda i(N-i)}{C_N^2}$

因此, 转移速率矩阵为

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & & & & \\
0 & -\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & & & \\
 & & -\frac{2\lambda(N-2)}{C_N^2} & \frac{2\lambda(N-2)}{C_N^2} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & -\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} \\
 & & & & 0 & 0
\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ \mu & -\mu-\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & & & & \\ & 2\mu & -2\mu-\frac{\lambda 2(N-2)}{C_N^2} & \frac{\lambda 2(N-2)}{C_N^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (N-1)\mu & 1-\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} \\ & & & & N\mu & -N\mu \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

七、**(7 分)** 若$\{Y_n, n \geq 0\}$是随机变量序列，X为任意随机变量且$E(|X|) < \infty$。

令$Z_n = E[X|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n]$，证明：$\{Z_n, n \geq 0\}$是关于$\{Y_n, n \geq 0\}$的一个鞅。

证明：（1）对任意的$n \geq 0$，

$$E\left(|Z_n|\right) = E[|E(X|Y_0,\ldots,Y_n)|] \leq E[E(|X||Y_0,\ldots,Y_n)] = E(|X|) < \infty.$$

（条件期望的 Jansen 不等式）

（2）对任意的$n \geq 1$,

$$E(Z_{n+1}|Y_0,\ldots,Y_n) = E[E(X|Y_0,\ldots,Y_{n+1})|Y_0,\ldots,Y_n] = E(X|Y_0,\ldots,Y_n) = Z_n$$

（条件期望的塔式法则）

八、**(8 分)** 设$\{U_n, n \geq 0\}$和$\{V_n, n \geq 0\}$都是关于过程$\{Y_n, n \geq 0\}$的鞅，并且$U_0 = V_0 = 0$，对于所有的 n，$E(U_n^2) < \infty$，$E(V_n^2) < \infty$。证明：

$$E(U_n V_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n}(U_k V_k - U_{k-1}V_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{n} E[(U_k - U_{k-1})(V_k - V_{k-1})].$$

证明：只需要对每个$k>0$,有$E(U_k V_k - U_{k-1}V_{k-1}) = E[(U_k - U_{k-1})(V_k - V_{k-1})]$。

事实上，$E[(U_k - U_{k-1})(V_k - V_{k-1})] = E[U_k V_k - U_k V_{k-1} - U_{k-1}(V_k - V_{k-1})]$

$$\because E[U_k V_{k-1} + U_{k-1}(V_k - V_{k-1})]$$
$$= E\{E[U_k V_{k-1} + U_{k-1}(V_k - V_{k-1}) \mid Y_1, \ldots, Y_{k-1}]\}$$
$$= E\{U_{k-1}V_{k-1} + U_{k-1}(V_{k-1} - V_{k-1})\} \quad (E(U_k V_{k-1} \mid Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = U_{k-1}V_{k-1})$$
$$= E[U_{k-1}V_{k-1}]$$

九、**(10 分)** 设$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，给定$a > 0$，计算

$$P(\max_{0 \leq s \leq t} B(s) - B(t) > a)$$。（计算结果用标准正态分布的分布函数表示）。

解：

因为$\left\{\max_{0\leq s\leq t} B(s) - B(t) \geq a\right\} \Leftrightarrow \left\{\max_{0\leq s\leq t}\{B(s) - B(t)\} \geq a\right\}$，$B(s) - B(t) \overset{d}{=} B(t) - B(s) \overset{d}{=} B(t-s)$

且$\max_{0\leq s\leq t} B(t-s) = \max_{0\leq s\leq t} B(t)$，

于是$P\left\{\max_{0\leq s\leq t} B(s) - B(t) \geq a\right\} = P\left\{\max_{0\leq s\leq t} B(t-s) \geq a\right\} = P\left\{\max_{0\leq s\leq t} B(t) \geq a\right\}$

$$= P\left\{\max_{0\leq s\leq t} B(s) \geq a\right\} = P\{T_a \leq t\}$$

$$= 2P\{B(t) \geq a\} = 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$$

十、**(10 分)**假设$\{N(t), t \geq 0\}$为参数为λ的泊松过程，$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，两者相互独立。令 $X(t)=(-1)^{N(t)}+B(e^t)-tB(1)$， $0 \leq t \leq 1$。当$0 \leq t < t+s \leq 1$时，计算 $X(t)$的协方差函数$Cov(X(t), X(t+s))$。

解：因为 $E(-1)^{N(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}=e^{-\lambda s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda s)^n}{n!}=e^{-2\lambda s}$

所以

$$E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)}\right)=E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)+N(t)}\right)=E\left((-1)^{2N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)}\right)$$

$$=E(-1)^{N(t+s)-N(t)}=e^{-2\lambda s}$$

$$\therefore Cov((-1)^{N(t)},(-1)^{N(t+s)})=E\left((-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)}\right)-E\left((-1)^{N(t)}\right)\cdot E\left((-1)^{N(t+s)}\right)$$

$$=e^{-2\lambda s}-e^{-2\lambda t}e^{-2\lambda(t+s)}=e^{-2\lambda s}-e^{-2\lambda s}e^{-4\lambda t}$$

另一方面：

$$E(B(e^t)-tB(1))=0\text{，}$$

$$E(B(e^t)-tB(1))(B(e^{t+s})-(t+s)B(1))$$

$$=E[B(e^t)B(e^{t+s})-tB(1)B(e^{t+s})-(t+s)B(1)B(e^t)+t(t+s)B(1)B(1)]$$

$$=e^t-t-(t+s)+t(t+s)$$

$$=e^t-2t-s+t(t+s)$$