Brownian Motion

例7. 1. 1：设$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，计算$P\{B(2) \leq 0\}$和$P\{B(t) \leq 0, t=0,1,2\}$。

$$P(B(2) \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(B(0) \leq 0,\ B(1) \leq 0,\ B(2) \leq 0) = P(B(1) \leq 0,\ B(2) \leq 0)$$

$$= P(B(1) \leq 0,\ B(1) + B(2) - B(1) \leq 0)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} P(B(1) + (B(2) - B(1)) \leq 0 \mid B(1) = x) f_{B(1)}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} P(B(2) - B(1) \leq -x)\, \phi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \Phi(-x)\, \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (1 - \Phi(x))\, d\Phi(x)$$

$$= \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\Phi^2(x)\right)\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

例7. 2. 1：设$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，求$B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$的分布。

$$B(1)+B(2)+B(3)+B(4) = (4,3,2,1)\begin{pmatrix} B(1) \\ B(2)-B(1) \\ B(3)-B(2) \\ B(4)-B(3) \end{pmatrix} = a^T b$$

$$E[a^T b] = a^T E[b] = 0$$

$$Var(a^T b) = a^T Var(b)\, a = (4,3,2,1)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 30$$

$$\therefore B(1)+B(2)+B(3)+B(4) \sim N(0, 30)$$

例7.2.2：设$\{B(t),t\geq 0\}$为标准布朗运动，求$B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$的分布。

$$B(1/4)+B(1/2)+B(3/4)+B(1) = (4,3,2,1)\begin{pmatrix} B(\frac{1}{4}) \\ B(\frac{1}{2})-B(\frac{1}{4}) \\ B(\frac{3}{4})-B(\frac{1}{2}) \\ B(1)-B(\frac{3}{4}) \end{pmatrix} \triangleq a^T b$$

$\therefore E[a^T b]=0$,

$$Var(a^T b) = a^T Var(b)\, a = (4,3,2,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & & & \\ & \frac{1}{4} & & \\ & & \frac{1}{4} & \\ & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7.5$$

$\therefore B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1) \sim N(0, 7.5)$

例7.2.3：求$P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$。

先说明 $\int_0^1 B(t)dt \sim N(0,\frac{1}{3})$

作 $0\leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, $t_i = \frac{i}{n} \Rightarrow \Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$

$\int_0^1 B(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} B(t_i)\Delta t_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(\frac{i}{n})$, 其中 $B(\frac{i}{n}) \sim N(0,\frac{i}{n})$

因此 $\int_0^1 B(t)dt \sim N(0, \square)$

$$Var(\int_0^1 B(t)dt) = Cov(\int_0^1 B(t)dt, \int_0^1 B(s)ds)$$

$$= E[\int_0^1 B(t)dt \int_0^1 B(s)ds] - E[\int_0^1 B(t)dt]\, E[\int_0^1 B(s)ds]$$

$$= E[\int_0^1\int_0^1 B(t)B(s)\,dt\,ds] = \int_0^1\int_0^1 E[B(t)B(s)]\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \min(s,t)\,ds\,dt = 2\int_0^1\int_0^t s\,ds\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \int_0^1 B(t)dt \sim N(0,\frac{1}{3})$

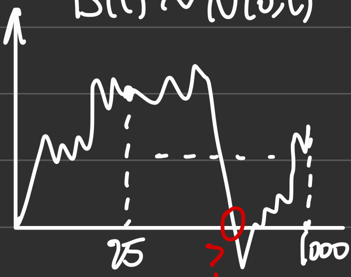
$\Rightarrow P(\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}) = P\left(\frac{\int_0^1 B(t)dt}{1/\sqrt{3}} > 2\right) = 1-\Phi(2)$

例：(领先权不变)（方兆本，缪柏其，2005，p.142）

设一个赌徒在每局赌博中等概率的赢一元或输一元，假设总赌局数为1000局，若到第25局截至时累积收益大于0。求他在剩下的975局中一直没有动用过自己本金的概率。

[注]：用Brown运动建模此随机游走

$B(t)\sim N(0,t)$



第25局$(t=25)$到第1000局$(t=1000)$

$B^x(t)$没有与$x=0$相交的概率为

$$P=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{25}{1000}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{0.025}$$

1、设在两人的自行车赛中，t表示内道出发的参赛者完成的路程比例，以$Y(t)$记从内道出发的参赛者领先的时间数量(以秒计)，并且假设$\{Y(t),t\geq 0\}$可以有效地用方差参数为σ^2的布朗运动建模。如果在竞赛的中点，内道的参赛者领先σ秒，求他最终取胜的概率。

$Y(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

$$P(Y(1)\geq 0\mid Y(\tfrac12)=\sigma)=P(Y(1)-Y(\tfrac12)\geq -Y(\tfrac12)\mid Y(\tfrac12)=\sigma)$$

$$=P(Y(1)-Y(\tfrac12)\geq-\sigma)\qquad (Y(1)-Y(\tfrac12)\sim N(0,\tfrac12\sigma^2))$$

$$=1-P(Y(1)-Y(\tfrac12)\leq-\sigma)$$

$$=1-P\left(\frac{Y(1)-Y(\frac12)}{\sigma/\sqrt2}\leq-\sqrt2\right)=1-\Phi(-\sqrt2)\approx\Phi(\sqrt2)$$

7.5 设$\{B(t),t\geqslant0\}$为标准Brown运动，证明$M(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}B(s)$，$|B(t)|$与$M(t)-B(t)$具有相同的分布。试找出$m(t)=\min\limits_{0\leqslant s\leqslant t}B(s)$的分布。

$(M(t)-B(t)\geq 0)$

① 当$x>0$时，

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t}B(s)-B(t)\geq x\right)=P\left(\max_{0\leq s\leq t}(B(s)-B(t))\geq x\right)$$

记$u=t-s\in[0,t]$，则由于$B(s)-B(t)$与$B(u)=B(t-s)$同分布

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t}(B(s)-B(t))\geq x\right)=P\left(\max_{0\leq u\leq t}B(u)\geq x\right)=P(T_x\leq u)$$
$$=2P(B(u)\geq x)$$

而$P(|B(t)|\geq x)=2P(B(t)\geq x)$，

因此$|B(t)|$与$\max\limits_{0\leq s\leq t}B(s)-B(t)$同分布！

② 当$x<0$时，$P(|B(t)|\le x)=0$，

$$P(M(t)-B(t)\le x)=P(\max_{0\le s\le t}B(s)\le \boxed{B(t)+x})=0$$，两者也相等。

$$\overset{<B(t)}{\Uparrow}$$

当$x<0$时 $P(m(t)\le x)=P(T_x\le t)=2P(B(t)\ge x)$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2t}}du$$

九、(10分) 设$\{B(t),t\ge 0\}$为标准布朗运动，给定$a>0$，计算$P(\max_{0\le s\le t}B(s)-B(t)>a)$。（计算结果用标准正态分布的分布函数表示）。

$P(\max_{0\le s\le t}(B(s)-B(t))>a)$，（记 $u=t-s\in[0,t]$，则由于$B(s)-B(t)$与$B(t-s)$ 有相同的分布）

$=P(\max_{0\le u\le t}B(u)>a)=2P(B(t)>a)=2P(\frac{B(t)}{\sqrt{t}}>\frac{a}{\sqrt{t}})$

$=2(1-\Phi(\frac{t}{\sqrt{a}}))$

十、(10分)假设$\{N(t),t\ge 0\}$为参数为λ的泊松过程，$\{B(t),t\ge 0\}$为标准布朗运动，两者相互独立。令$X(t)=(-1)^{N(t)}+B(e^t)-tB(1)$，$0\le t\le 1$。当$0\le t<t+s\le 1$时，计算$X(t)$的协方差函数$Cov(X(t),X(t+s))$。

$X(t)=(-1)^{N(t)}+(B(e^t)-tB(1))\triangleq A(t)+M(t)$，且$A(t),M(t)$相互独立

$Cov(X(t),X(t+s))=Cov(A(t)+B(t),\ A(t+s)+B(t+s))$

$=Cov(A(t),A(t+s))+Cov(B(t),B(t+s))$

$\boxed{\text{关于}Cov(A(t),A(t+s))}$：

$E[A(t)A(t+s)]=E[(-1)^{N(t)}\cdot(-1)^{N(t+s)}]=E[(-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)+N(t)}]$

$=E[(-1)^{N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)}\cdot(-1)^{N(t)}]$

$=E[(-1)^{2N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)}]=E[(-1)^{N(t+s)-N(t)}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t+s)-N(t)=n)\cdot(-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(-\lambda s)^n}{n!} = e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda s)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda s} = e^{-2\lambda s}$$

$$E[A(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (-1)^n = e^{-2\lambda t}$$

$$\therefore Cov(A(t), A(t+s)) = e^{-2\lambda s} - e^{-2\lambda t} \cdot e^{-2\lambda(t+s)} = e^{-2\lambda s} - e^{-4\lambda t - 2\lambda s}$$

关于 $Cov(M(t), M(t+s))$

① $E[M(t)M(t+s)] = E[(B(e^t) - tB(1))(B(e^{t+s}) - (t+s)B(1))]$

$$= E[B(e^t)B(e^{t+s}) - (t+s)B(e^t)B(1) - tB(e^{t+s})B(1) + t(t+s)B^2(1)]$$

注意到 $E[B(e^t)B(e^{t+s})] = \min\{e^t, e^{t+s}\} = e^t$

(Brownian Motion 的协方差 $Cov(B(t), B(s)) = \min\{s,t\}$

$\Rightarrow E[B(t)B(s)] = \min\{s,t\}$)

② $E[B(e^t)] = 0$

因此 $Cov(M(t), M(t+s)) = \min\{e^t, e^{t+s}\} - (t+s)\min\{e^t, e^0\}$

$$- t\min\{e^{t+s}, e^0\} + t(t+s)\min\{e^0, e^0\}$$

$$= e^t - (t+s) - t + t(t+s)$$

$$= e^t - 2t - s + t^2 + ts$$

因此 $Cov(X(t), X(t+s)) = Cov(A(t), A(t+s)) + Cov(B(t), B(t+s))$

$$= e^{-2\lambda s} - e^{-4\lambda t - 2\lambda s} + e^t - 2t - s + t^2 + ts$$

八、(17 分) 随机过程 $\{B(t), t\geq 0\}$ 是一个标准布朗运动，$T_x=\inf\{t: B(t)=x, t\geq 0\}$ 为首达时。

(1) 计算二维随机变量 $(\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t, B(1))$ 的协方差矩阵；

(2) 给定 $0<u<v<x$，计算条件概率 $P\{u<B(t)<v \mid T_x<t\}$（计算结果用标准正态分布的分布函数表示）。

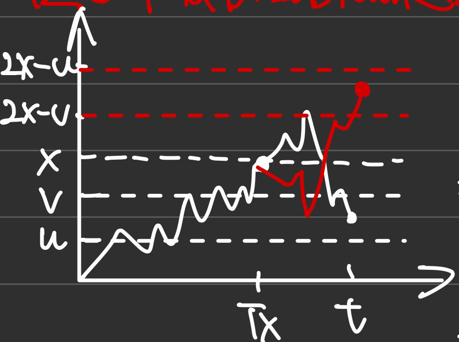
(1) 之前已证 $\int_0^1 B(t)dt \sim N(0,\frac{1}{3})$，$B(1)\sim N(0,1)$

$$Cov(\int_0^1 B(t)dt, B(1)) = E[\int_0^1 B(t)dt\cdot B(1)]$$
$$= E[\int_0^1 B(t)B(1)dt] = \int_0^1 E[B(t)B(1)]dt$$
$$= \int_0^1 \min\{t,1\}dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

因此 $\Sigma = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $$P(u<B(t)<v \mid T_x<t) = \frac{P(u<B(t)<v, T_x<t)}{P(T_x<t)}$$

(这与带吸收的Brown运动的推导有异曲同工之妙)



$$P(u<B(t)<v, T_x<t)$$
$$= P(2x-v<B(t)<2x-u, T_x<t)$$

因为 $\{2x-v<B(t)<2x-u\} \Rightarrow \{B(t)>2x-v\}$
$\Rightarrow \{B(t)>x\} \Rightarrow \{T_x<t\}$

故而 $\{2x-v<B(t)<2x-u\} \subseteq \{T_x<t\}$

那么 $$P(u<B(t)<v \mid T_x<t) = \frac{P(2x-v<B(t)<2x-u, T_x<t)}{P(T_x<t)}$$

$$= \frac{P(2x-v<B(t)<2x-u)}{P(T_x<t)} = \frac{\Phi(\frac{2x-u}{\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{2x-v}{\sqrt{t}})}{2(1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))}$$

九、**(15 分)**设标准布朗运动为 $\{B(t), t \ge 0\}$。假设市场上有两种风险资产，其价格分别为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，且 $X_1(t)$ 满足 $d(\ln X_1(t)) = 0.2dB(t)$，$X_2(t)$ 满足 $\dfrac{dX_2(t)}{X_2(t)} = 0.02dt + 0.2dB(t)$，$X_1(0) = X_2(0) = 1$。某人的初始财富为 1，他采用投入持有策略，即将财富的一半投在风险资产 $X_1(t)$ 中，剩下的一半投在风险资产 $X_2(t)$ 中，然后一直持有，不做任何其它交易。设他的财富过程为 $Y(t)$，求 $P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} Y(s) \ge e^{0.2}\right\}$。（请用标准正态分布函数表达）

解：根据题意，

$\because X_1(t) = X_2(t)$

$\therefore Y(t) = X_1(t) = e^{0.2B(t)}$，

则 $P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} e^{0.2B(s)} \ge e^{0.2}\right\} = P\left\{\max\limits_{0\le s\le t} 0.2B(s) \ge 0.2\right\}$

$$= P\left\{\max_{0\le s\le t} B(s) \ge 1\right\} = P\{T_1 \le t\}$$

$$= 2P\{B(t) \ge 1\} = 2(1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{t}}))$$

七、**(18 分)** 随机过程 $\{B_t, t \ge 0\}$ 是一个标准布朗运动，$T_x = \inf\{t : B_t = x, t \ge 0\}$ 为首达时，则对任意的 $t > s > 0$ 以及常数 a，

（1）（4 分）计算 $Var(B_t \mid B_s = a)$；

（2）（7 分）计算 $Var(B_s \mid B_t = a)$；（提示：利用条件分布）

（3）（7 分）推导首达时 T_x 的分布，并计算 $P\left\{\max_{s \le v \le t} B_v > a\right\}$（计算结果请用标准正态分布函数表达）。

解答：(1)

$\because B(t) = B(s) + (B(t) - B(s))$

$\therefore B(t) \mid B(s) = 1$与$1 + (B(t) - B(s))$同分布

$\therefore Var(B(t) \mid B(s) = 1) = Var(B(t) - B(s)) = t - s$

(2) 当$0 < s < t$时，

$$\begin{pmatrix} B(s) \\ B(t) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}\right),$$

$$corr(B(s), B(t)) = \frac{Cov(B(s), B(t))}{\sqrt{st}} = \left(\frac{s}{t}\right)^{1/2}$$

$\because \sigma_1^2(1 - \rho^2) = s(1 - \frac{s}{t})$

$\therefore Var(B(s) \mid B(t) = 1) = Var(B(t) - B(s)) = \frac{s(t-s)}{t}$

(3)

$$P\{T_x \le t\} = 2P\{B(t) \ge x\} = 2(1 - P\{B(t) < x\})$$
$$= 2(1 - P\{B(t)/\sqrt{t} < x/\sqrt{t}\})$$
$$= 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))$$

另外，$P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$，

其中 $f_{B(s)}(y) = \frac{1}{s}\phi(\frac{y}{\sqrt{s}})$。

$$P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) \ge 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= \int_1^{\infty} f_{B(s)}(y)dy + \int_{-\infty}^{1} P\left\{\max_{s \le v \le t} B(v) > 1 \middle| B(s) = y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= 1 - P(B(s) > 1) + \int_{-\infty}^{1} P\left\{\max_{0 \le v \le t-s} B(v) > 1 - y\right\} f_{B(s)}(y)dy$$

$$= 1 - P(B(s) > 1) + \int_{-\infty}^{1} P(T_{1-y} \le t - s) f_{B(s)}(y)dy$$

Martingale

例 6.1.1 设 $X_0=0$ 和 $X_1,X_2\cdots$ 是独立随机变量序列，且对所有 n，$E(|X_n|)<+\infty$，$E(X_n)=0$。如果 $S_0=0$ 且 $S_n=X_1+\cdots+X_n$，$n\ge 1$，则 $\{S_n\}$ 是关于 $\{X_n\}$ 的一个鞅。

① $E|S_n| = E\left|\sum X_i\right| \le \sum E[X_i] < \infty$

② $E[S_{n+1}|X_1\ldots X_n] = E[S_n+X_n|X_1\ldots X_n] = E[S_n|X_1\ldots X_n] + E[X_n] = \underbrace{S_n+X_n}_{=S_{n+1}}$

加倍赌博

考虑如下赌注翻倍的公平赌博：记 Y_n 为第 n 次赌博的结果，$P(Y_n=1)=P(Y_n=-1)=\frac{1}{2}$，$W_n$ 为第 n 次赌博后所输/所赢的总金额，$W_0=0$。每次抛硬币之前的赌注都比上一次翻一倍，直到赢了赌博即停。则 $\{W_n\}$ 是关于 $\{Y_n\}$ 的鞅。

① $E[|W_n|] = E[|W_n|\,|\,Y_1=1]P(Y_1=1) + E[|W_n|\,|\,Y_1=-1]P(Y_1=-1)$

$= 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(E[|W_n|\,|\,Y_2=1,Y_1=-1)\,P(Y_2=1) + E[|W_n|\,|\,Y_2=-1,Y_1=-1)\,P(Y_2=-1)\Big)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[|W_n|\,|\,Y_2=-1,Y_1=-1\Big)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}E[|W_n|\,|\,Y_n=-1,\ldots Y_1=-1]$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}|-1-2-\cdots-2^{n-1}|$

$= \dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}^n)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^n}\left(\dfrac{2^n-1}{2-1}\right) = 1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}(2^n-1) = 2-\frac{1}{2^{n-1}} < 2 < \infty$

② 赢了时总金额必然为 $(-1-2-\cdots-2^{n-1})+2^n=1$

根据规则 $E[W_{n+1}\,|\,W_n=1]=1=W_n$，即 $E[W_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=W_n$.

而 $E[W_{n+1}\,|\,W_n<0] = E[W_{n+1}\,|\,W_n<0, Y_{n+1}=1]\cdot\frac{1}{2} + E[W_{n+1}\,|\,W_n<0, Y_{n+1}=-1]\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(W_n+2^n)+\frac{1}{2}(W_n-2^n)=W_n$，即 $E[W_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=W_n$

例 6.1.4

我们可以把例 6.1.3 一般化。设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 仍如例 6.1.3 的假定，而每次赌博所下赌注将与前面的结果有关，以 B_n 记第 n 次所下的赌注，则 B_n 是 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ 的函数，换言之，B_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的（设 B_1 为常数）。仍然令 W_n 同例 6.1.3 之定义，$W_0=0$，则※证明 $\{W_n\}$ 是关于 $\{Y_n\}$ 的鞅

$$W_n=\sum_{i=1}^{n} B_iY_i \Rightarrow E[W_{n+1}|Y_1,\ldots Y_n]=E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_iB_i+Y_{n+1}B_{n+1}\middle|Y_1\ldots Y_n\right]$$

$$=W_n+E[Y_{n+1}B_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=W_n+B_{n+1}E[Y_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]$$

$$=W_n+B_{n+1}\cdot 0=W_n$$

Polya 坛模型

坛子中有 b 只黑球，r 只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球 c 只。再摸第二次，这样下去共摸了 n 次。记 X_n 为第 n 次抽取后坛子中的红球数，$X_0=r$，M_n 为第 n 次抽取后红球所占的比例，则 $\{M_n\}$ 是关于 $\{X_n\}$ 的鞅。

$$P(X_{n+1}=k+c|X_n=k)=\frac{k}{b+r+nc}$$

$$P(X_{n+1}=k|X_n=k)=\frac{b+r+nc-k}{b+r+nc}$$

$$M_n=\frac{X_n}{b+r+nc} \quad \text{Markov Chain}$$

①

$$E[M_{n+1}|X_1\ldots X_n]=E\left[\frac{X_{n+1}}{b+r+(n+1)c}\middle|X_1\ldots X_n\right]=\frac{E[X_{n+1}|X_n]}{b+r+(n+1)c}$$

由于 $E[X_{n+1}|X_n=k]=(k+c)\cdot\frac{k}{b+r+nc}+k\frac{b+r+nc-k}{b+r+nc}$

$$=\frac{\cancel{k^2}+ck+(b+r+nc)k-\cancel{k^2}}{b+r+nc}=\frac{[b+r+(n+1)c]k}{b+r+nc}$$

因此

$$E[M_n|X_1\ldots X_n]=\frac{\cancel{[b+r+(n+1)c]}X_n}{b+r+nc}\cdot\frac{1}{\cancel{b+r+(n+1)c}}=\frac{X_n}{b+r+nc}=M_n$$

② $E[|M_n|] = \dfrac{E[|X_n|]}{b+r+nc} < 1 < \infty$, √

$\therefore \{M_n\}$ 是关于 $\{X_n\}$ 的鞅

P.124和P.129：例6.1.3 加倍下注直到赢为止

$E(W_T)=1\neq E(W_0)=0$

因为不满足条件(3)（$\lim\limits_{n\to\infty} E(|W_n I_{\{T>n\}}|)=0$）

要求：验证为什么 T 不是停时？

$$E[|W_n| I_{\{T>n\}}] = E[|W_n| I_{\{T>n\}} \mid T>n] P(T>n) + E[|W_n| I_{\{T>n\}} \mid T\le n] \underbrace{P(T\le n)}$$

$$= E[|W_n| \mid \underbrace{T>n}_{\text{还没赢}}] \underbrace{P(T>n)}_{\text{n 次之后才停下，全输}}$$

$$= |1-2^n| \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$(n\to\infty) \quad = (2^n-1)\cdot\frac{1}{2^n} \to 1 \neq 0$$

(1)

例 6.2.4 设$\{X_n\}$是$\{0,1,\cdots,N\}$上的简单随机游动（$p=1/2$）. 设$X_0=a$，令$T=\min\{j: X_j=0\text{或}N\}$，求$E(X_T)$、$P(X_T=N)$.

(2) 假定 $M_n=X_n^2-n$，证明 $\{M_n\}$ 是关于 $\{X_n\}$ 的鞅，并求 $E[M_T]$, $E[T]$

Pf：(1) 考虑停时定理

① $P(T<\infty) = f_{a0} + f_{aN} = 1$

② $E[|X_T|] \le N < \infty$

③ $E[|X_n| I_{\{T>n\}}] = E[|X_n| \mid T>n] P(T>n) \le N P(T>n) \to 0$

（因为 $P(T<\infty)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} P(T>n)=0$）

$\therefore$ 满足停时定理 $\Rightarrow E[X_T] = E[X_0] = a$

而 $E[X_T] = E[X_T \mid X_T=N] P(X_T=N) + E[X_T \mid X_T=0] P(X_T=0)$

$a = NP(X_T=N) \Rightarrow P(X_T=N) = \dfrac{a}{N}$

Pf：(2). $E[|M_n|] = E[|X_n^2-n|] \le N^2+n < \infty$ (?)

$E[M_{n+1} \mid X_0,\dots X_n] = E[X_{n+1}^2 \mid X_0\dots X_n] - (n+1)$

$$= \left(E[(X_n+1)^2 | X_0\ldots X_n]\cdot\frac{1}{2} + E[(X_n-1)^2 | X_0\ldots X_n]\frac{1}{2}\right) - (n+1)$$

$$= E[\tfrac{1}{2}X_n^2 + \cancel{X_n} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}X_n^2 - \cancel{X_n} + \tfrac{1}{2} \mid X_0\ldots X_n] - (n+1)$$

$$= E[X_n^2+1 \mid X_0\ldots X_n] - (n+1) = X_n^2 - n = M_n$$

$\therefore \{M_n\}$是$\{X_n\}$的鞅.

所有取值更高

可以证明 $P(T>n) \le Cp^n \to 0$ $(p<1)$

考虑停时定理 ① $P(T<\infty)=1$ ✓

② $E[|M_T|] \le N^2+T < \infty$ $\to 0.$

③ $E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = (N^2+n)\cdot P(T>n) \to 0$

七、**(18 分)** 考虑一个在整数上的随机游走模型，设每次向右移动一步的概率 $p<\frac{1}{2}$，向左移动一步的概率为 $1-p$，S_n表示时刻 n 质点所处的位置，假定 $S_0=a(0<a<N)$ 。

(1) 证明：$\left\{M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right\}$ 是关于$\{S_n\}$的鞅；

(2) 令$T=\min\{n:\ S_n=0 \text{ 或 } N\}$，即$T$表示随机游走第一次到达 0 或 N 的时刻。假设T满足鞅的停时定理，请利用鞅的停时定理，计算$P(S_T=0)$。

(1) ① $E[M_{n+1} | S_0 \ldots, S_n] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}} \middle| S_0,\ldots,S_n\right]$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n+1}\cdot p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n-1}\cdot(1-p)$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\cdot(1-p) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\cdot\frac{p}{\cancel{1-p}}\cdot\cancel{(1-p)} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} = M_n$$

② $E[|M_n|] = E\left[\left(\underbrace{\frac{1-p}{p}}_{>1}\right)^{S_n}\right] \le \left(\frac{1-p}{p}\right)^N < \infty$ (固定p, N时)

$\therefore \{M_n\}$为关于$\{S_n\}$的鞅

(2) 由鞅的停时定理, $E[S_T]=E[S_0]=a$

同时 $E[S_T]=E[S_T|S_T=0]P(S_T=0)+E[S_T|S_T=N]P(S_T=N)$

$\Rightarrow a = NP(S_T=N) \Rightarrow P(S_T=N)=\frac{a}{N}$

$\Rightarrow P(S_T=0)=1-\frac{a}{N}$

(T满足吗? $P(T<\infty)=f_{a0}+f_{aN}=1$ ✓

$E[|S_T|]\le N<\infty$ ✓

$E[|S_n| I_{\{T>n\}}]=E[S_n|T>n]P(T>n)$

$\le NP(T>n)\to 0$ ✓

∴T满足鞅停时定理条件)

七、**(7 分)** 若$\{Y_n, n\ge 0\}$是随机变量序列，X为任意随机变量且$E(|X|)<\infty$。

令$Z_n=E[X|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n]$，证明：$\{Z_n,n\ge 0\}$是关于$\{Y_n,n\ge 0\}$的一个鞅。

(Doob鞅)

① $E[Z_{n+1}|Y_0,\dots,Y_n]=E\big[E[X|Y_0,\dots,Y_{n+1}]\big|Y_0,\dots,Y_n\big]$

$=E[X|Y_0\dots Y_n]=Z_n$

② $E[|Z_n|]=E\big[|E[X|Y_0\dots Y_n]|\big]$

$\le E\big[E[|X||Y_0\dots Y_n]\big]=E[|X|]<\infty$

∴$\{Z_n\}$是关于$\{Y_n\}$的鞅

Jensen不等式

八、(8 分) 设$\{U_n, n\ge 0\}$和$\{V_n, n\ge 0\}$都是关于过程$\{Y_n, n\ge 0\}$的鞅，并且$U_0 = V_0 = 0$，对于所有的 n，$E(U_n^2)<\infty$，$E(V_n^2)<\infty$。证明：

$$E(U_nV_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n}(U_kV_k - U_{k-1}V_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{n} E[(U_k - U_{k-1})(V_k - V_{k-1})].$$

用鞅的性质
降下标

$$E[(U_k-U_{k-1})(V_k-V_{k-1})]$$

$$=E[U_kV_k - U_kV_{k-1} - U_{k-1}V_k + U_{k-1}V_{k-1}]$$

注意到 $E[U_kV_{k-1}] = E[E[U_kV_{k-1} \mid Y_0 \ldots Y_{k-1}]] = E[V_{k-1}U_{k-1}]$

$E[U_{k-1}V_k] = E[E[U_{k-1}V_k \mid Y_0\ldots Y_{k-1}]] = E[U_{k-1}V_{k-1}]$

因此 $E[(U_k-U_{k-1})(V_k-V_{k-1})]$

$= E[U_kV_k - 2U_{k-1}V_{k-1} + U_{k-1}V_{k-1}]$

$= E[U_kV_k - U_{k-1}V_{k-1}]$

从而 $E[\sum_{k=1}^{n}(U_k-U_{k-1})(V_k-V_{k-1})] = E[\sum_{k=1}^{n}(U_kV_k - U_{k-1}V_{k-1})]$

七、**(10 分)**若$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$是任意随机变量序列，若对所有 n，X_n是$Y_0,\cdots,Y_n$的函数，且$E(|X_n|)<+\infty$，令 $Z_n = \sum_{i=0}^{n}[X_i - E(X_i \mid Y_0,\cdots,Y_{i-1})]$，其中约定 $i=0$ 时，$E(X_i \mid Y_0,\cdots,Y_{i-1}) = E(X_0)$。证明：$\{Z_n\}$是关于$\{Y_n, n\ge 0\}$的一个鞅。

证明：(1) $Z_n = \sum_{i=0}^{n}[X_i - E(X_i \mid Y_0,\cdots,Y_{i-1})]$是$Y_0,\cdots,Y_n$的函数。

(2) 对任意的 $n\ge 0$,

$$E(|Z_n|) = E(|\sum_{i=0}^{n} X_i - E(X_i \mid Y_0,\ldots,Y_{i-1})|) \le \sum_{i=0}^{n} E(|X_i|) + \sum_{i=0}^{n} E(E(|X_i| \mid Y_0,\ldots,Y_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=0}^{n} E(|X_i|) + \sum_{i=0}^{n} E(|X_i|) < \infty.$$

(3) 对任意的 $n\ge 1$,

$$E(Z_n \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1}) = E(\sum_{i=0}^{n} X_i - E(X_i \mid Y_0,\ldots,Y_{i-1}) \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1})$$

$$= E(\sum_{i=0}^{n-1} X_i - E(X_i \mid Y_0,\ldots,Y_{i-1}) \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1}) + E(X_n - E(X_n \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1}) \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1})$$

$$= (\sum_{i=0}^{n-1} X_i - E(X_i \mid Y_0,\ldots,Y_{i-1})) + E(X_n \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1}) - E(X_n \mid Y_0,\ldots,Y_{n-1})$$

$$= Z_{n-1}.$$

六、**(17 分)** 假设随机过程 $\{M_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个鞅，且 $M_0=0$。令 $X_i = M_i - M_{i-1}$，$i=1,2,\cdots$，则有 $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n\ge 1$。（注意：X_i之间不一定相互独立。）

（1）（7 分）证明：$Var(M_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$，$n \ge 1$；

（2）（10 分）如果进一步假设序列 $\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ 独立同分布，且 $Var(X_i) = \sigma^2$，证明：随机过程 $\{M_n - n\sigma^2, n=0,1,2,\cdots\}$ 关于 $\{M_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是鞅。

解答：(1) 因为随机过程 $\{M_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是鞅，我们有对任意 $n\ge 1$，有 $E[X_n]=E[M_n]-E[M_{n-1}]=0$ 且 $E[M_n]=0$. 此外，对任意的 $j>i$，我们有：

$$\begin{aligned}E[X_iX_j] &= E[E[(M_i-M_{i-1})(M_j-M_{j-1})|M_1,M_2,\cdots,M_{j-1}]] \\ &= E[(M_i-M_{i-1})E[M_j-M_{j-1}|M_1,M_2,\cdots,M_{j-1}]]=0.\end{aligned}$$

所以，$cov(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=0,\ i\ne j$. 另外，

$$Var[M_n]=E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2]+\sum_{i\ne j} cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n} Var[X_i].$$

(2) 1.$\{M_n^2-n\sigma^2, n=1,2,\cdots\}$关于$\{M_n, n=0,1,2,\cdots\}$是适应的。

2.$E[|M_n^2-n\sigma^2|]\le E[M_n^2]+n\sigma^2=2n\sigma^2<\infty$.

3.此外，

$$\begin{aligned}E[M_{n+1}^2-(n+1)\sigma^2|M_1,M_2,\cdots,M_n] \\ &= E[(M_n+X_{n+1})^2|M_1,M_2,\cdots,M_n]-(n+1)\sigma^2\end{aligned}$$

$$= M_n^2+2M_nE[X_{n+1}|M_1,M_2,\cdots,M_n]+E[X_{n+1}^2|M_1,M_2,\cdots,M_n]-(n+1)\sigma^2$$

$$= M_n^2+2M_nE[X_{n+1}]+E[X_{n+1}^2]-(n+1)\sigma^2$$

$$= M_n^2+\sigma^2-(n+1)\sigma^2=M_n^2-n\sigma^2.$$

1、（似然比序列）设$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$为独立同分布随机变量序列，具有概率密度函数f，且对所有$-\infty<y<+\infty$，$f(y)>0$。若函数g为另一个随机变量的概率密度函数，令

$$X_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}$$

则$\{X_n\}$是关于$\{Y_n\}$的鞅。

关键一步：$E\left[\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\cdot f(Y_k)\,dY_k=\int_{-\infty}^{\infty}g(Y_k)\,dY_k=1$

① $E[|X_n|]=E\left[\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\right|\right]=\prod_{k=1}^{n}E\left[\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\right]=1<\infty$

② $E[X_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=E\left[\prod_{k=1}^{n+1}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\,\middle|\,Y_1\ldots Y_n\right]$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}E\left[\frac{g(Y_{n+1})}{f(Y_{n+1})}\,\middle|\,Y_1\ldots Y_n\right]=\prod_{k=1}^{n}\frac{g(Y_k)}{f(Y_k)}\cdot 1=X_n$$

$\therefore \{X_n\}$为关于$\{Y_n\}$的鞅

2、 假设Y_0在$(0,1]$上均匀分布。若给定Y_n，Y_{n+1}也是$(1-Y_n,1]$上均匀分布。令$X_0=1$，

$$X_n=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-Y_k}{Y_{k-1}}\right),\quad n=0,1,\cdots$$

证明$\{X_n\}$是关于$\{Y_n\}$的一个鞅。

$Y_{n+1}\in Unif(1-Y_n,1)\Rightarrow E[Y_{n+1}|Y_n]=\frac{2-Y_n}{2}=1-\frac{Y_n}{2}$

$\Rightarrow E[1-Y_{n+1}|Y_n]=\frac{Y_n}{2}\Rightarrow E\left[\frac{1-Y_{n+1}}{Y_n}\,\middle|\,Y_n\right]=\frac{1}{2}$

$X_{n+1}=2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1-Y_k}{Y_{k-1}}\right)=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-Y_k}{Y_{k-1}}\right)\cdot 2\left(\frac{1-Y_{n+1}}{Y_n}\right)$

$$=2X_n\left(\frac{1-Y_{n+1}}{Y_n}\right)$$

① $E[X_{n+1}|Y_0,\ldots Y_n]=2E\left[X_n\left(\frac{1-Y_{n+1}}{Y_n}\right)\,\middle|\,Y_0,\ldots Y_n\right]$

$$=2X_nE\left[\frac{1-Y_{n+1}}{Y_n}\,\middle|\,Y_n\right]=X_n$$

② $E[|X_n|]=E[E[|X_n|\,|\,Y_0,\ldots,Y_{n-1}]]=E[|X_{n-1}|]$

以此类推：$E[|X_n|]=E[|X_0|]=1<\infty$

$\therefore \{X_n\}$是关于$\{Y_n\}$的鞅

3、假设$Y_1,Y_2,\cdots$是独立的正态分布，其均值为0，方差为σ^2。令$X_0=1$，

$$X_n=\exp\{\lambda(Y_1+\cdots+Y_n)-\frac{n}{2}\lambda^2\sigma^2\},\quad n=0,1,\cdots$$

证明$\{X_n\}$是关于$\{Y_n\}$的一个鞅。

① $E[X_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=E[e^{\lambda(Y_1+\cdots+Y_n)-\frac{n}{2}\lambda^2\sigma^2+(\lambda Y_{n+1}-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)}|Y_1\ldots Y_n]$

$=X_n\ E[e^{\lambda Y_{n+1}-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}|Y_1\ldots Y_n]$

$N(0,\sigma^2)$ $\quad = X_n\cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\ E[e^{\lambda Y_{n+1}}]$

正态分布矩母函数：$E[e^{\lambda Z}]=e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$，又$Y_{n+1}\sim N(0,\sigma^2)$

$\therefore E[X_{n+1}|Y_1\ldots Y_n]=X_n\cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\cdot e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}=X_n$

② $E[|X_n|]=E[|X_0|]=1<\infty$

$\therefore \{X_n\}$为关于$\{Y_n\}$的鞅

$X_n=Y_n-Y_{n-1}$为鞅差序列

鞅差序列为零均值不相关序列

4、假设$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是随机变量序列，令$Y_n=\sum_{i=0}^{n}X_i$，$n\geq1$。若$\{Y_n,n=0,1,\cdots\}$是关于$\{X_n,n=0,1,\cdots\}$的一个鞅，证明：对任意的$0\leq i\neq j,\ E(X_iX_j)=0$。

$E[\sum_{i=0}^{n+1}X_i|X_0,\ldots X_n]=\sum_{i=0}^{n}X_i \Rightarrow E[X_{n+1}|X_0\ldots X_n]=0 \quad \forall n\in N^*$

不妨设$i<j$，则$i\leq j-1$，显然$X_i\in\sigma(X_0\ldots X_{i-1})\subseteq\sigma(X_0,\ldots X_{j-1})$

$E[X_iX_j]=E[E[X_iX_j|X_0\ldots X_{j-1}]]=E[X_i\,E[X_j|X_0\ldots X_{j-1}]]=0$

6.2 设X_1，X_2，…是独立同分布随机变量，令$m(t)=E(e^{tX_i})$，固定t并假定$m(t)<\infty$。令$S_0=0$，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，$\forall n>0$。证明$\{M_n=[m(t)]^{-n}\cdot e^{tS_n}\}$是关于$X_1$，$X_2$，…的鞅。

① $E[M_{n+1}|X_1\ldots X_n]=E[(m(t))^{-n}e^{tS_n}\cdot(m(t))^{-1}\cdot e^{tX_{n+1}}|X_1\ldots X_n]$

$=(m(t))^{-n}e^{tS_n}\ \cancel{[m(t)]^{-1}\cdot E[e^{tX_{n+1}}]}=M_n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = m(t)$

② $E[M_n]=E[M_0]=E[1\cdot e^{t\cdot 0}]=1<\infty$. ✓

6.3 令 X_0，X_1，…表示分支过程各代的个体数，$X_0=1$，任意一个个体生育后代的分布有均值 μ。证明 $\{M_n=\mu^{-n}X_n\}$ 是一个关于 X_0，X_1，…的鞅。

设 $Z_{n,i}$ 为第 n 代第 i 个个体生育的个体数. 则 $E[Z_{n,i}]=\mu$

$$X_n=\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_{n-1,i}$$

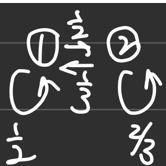
$$E[X_n|X_{n-1}]=\sum_{i=1}^{X_{n-1}} E[Z_{n-1,i}]=\mu X_{n-1}$$

① $E[M_{n+1}|X_0\ldots X_n]=E[\mu^{-(n+1)}X_{n+1}|X_0\ldots X_n]=\mu^{-(n+1)}E[X_{n+1}|X_n]$
$=\mu^{-(n+1)}\cdot\mu X_n=\mu^{-n}X_n=M_n$ ✓

② $E[|M_n|]=E[|M_0|]=E[X_0]=1<\infty$ ✓

Markov Chain

5.18 设 Markov 链的转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，求首达概率 $f_{11}^{(n)}$，$f_{12}^{(n)}$ $n=1,2,3$。



$f_{11}^{(1)}=1/2$ $f_{11}^{(2)}=1/6$ $f_{11}^{(3)}=1/2\times 2/3\times 1/3=1/9$

$f_{12}^{(1)}=1/2$ $f_{12}^{(2)}=1/4$ $f_{12}^{(3)}=1/8$

一、设齐次马尔可夫链的状态空间为 $S=\{1,2,3,4\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2&1/2&0&0\\1&0&0&0\\0&1/3&2/3&0\\1/2&0&1/2&0\end{bmatrix}$$

则下列说法不正确的是（D）。

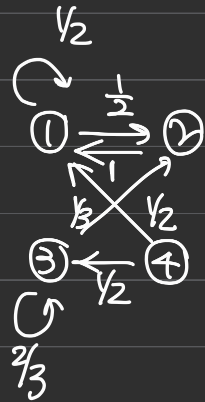
(A) 状态 1 是正常返状态

(B) 状态 2 与状态 3 不是互通的

(C) 状态 3 与状态 4 不是互通的

(D) 状态 ~~4~~ 是正常返状态

(E) 状态 2 的周期为 1 $\{2,3,4,5,\ldots\}$



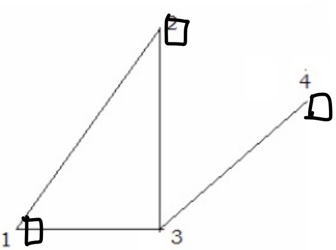
正常返 $f_{ii}=1$, $\mu<\infty$, 互通 $i\leftrightarrow j$

$f_{11}^{(1)}=1/2$ $f_{11}^{(2)}=1/2$ $f_{11}^{(3)}=0\ldots\Rightarrow f_{11}=1$

状态4为非常返.

二、设有一蚂蚁在下图上爬行，当两个结点相临时，蚂蚁将爬向它临近一点，并且爬向任何一个邻居的概率是相同的，则长时间之后蚂蚁处于第 4 个结点的概率为（1/8）。

$$P=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2&0\\1/2&0&1/2&0\\1/3&1/3&0&1/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$



$$\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3\\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_3\\ \pi_3=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\pi_4\\ \pi_4=\frac{1}{3}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}$$

$\Rightarrow(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{8})$

三、已知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链，状态空间为 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

计算 $\lim_{n\to\infty} p_{52}^{(n)}$

讨论点：2 $\begin{cases} \text{非常返/零常返？} \times \\ \text{正常返} \Rightarrow d(2)=1 \Rightarrow \text{出发点5} \begin{cases} \text{正常返？} \cancel{\checkmark} \\ \text{非常返？} \checkmark \end{cases} \end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} p_{52}^{(n)} = \dfrac{f_{52}}{\mu_2}$

这是个周期为1，正常返，有限状态 Markov 链 ⇒ 遍历链

⇒ 平稳分布 $\pi_2 = \cancel{\frac{1}{\mu_2}}$ $\dfrac{f_{52}}{\mu_2}$

解方程 $\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_3 = \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{4}{5}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_5 = \frac{1}{4}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \pi_0=\pi_1=\pi_4=\pi_5=0 \\ \pi_2 = \frac{4}{15}\pi_3 \\ \pi_2+\pi_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 = \frac{4}{19} \\ \pi_3 = \frac{15}{19} \end{cases}$

$\therefore \mu_2 = \dfrac{1}{\pi_2} = \dfrac{19}{4}$

$f_{55}^{(1)} = \frac{1}{6}$，$f_{55}^{(2)} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$　$f_{55}^{(3)} = \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$f_{55} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$= \frac{2}{9} < 1$

⇒ 5为非常返态!!（可以更快看出只有4,5互通，和其他都不互通）

$\{0,1,2,3\}$ 均为正常返态，$\{4,5\}$ 非常返

$$f_{52}=\sum_{j=0}^{5}P_{5j}f_{j2}=\frac{1}{6}(f_{02}+f_{12}+f_{22}+f_{32}+f_{42}+f_{52})$$

$(5\xrightarrow{\text{有限步}}2)$ $\quad =\frac{1}{6}(0+0+1+1+f_{42}+f_{52})$

(类似首达分解定理) $\quad \Rightarrow 5f_{52}=2+f_{42}$

$$f_{42}=\sum_{j=0}^{5}P_{4j}f_{j2}=\frac{1}{4}(f_{02}+f_{22}+f_{42}+f_{52})$$

$$=\frac{1}{4}(0+1+f_{42}+f_{52})\Rightarrow 3f_{42}=1+f_{52}$$

解得 $\begin{cases}f_{42}=\frac{1}{2}\\ f_{52}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}P_{52}^{(n)}=\frac{f_{52}}{\mu_2}=\frac{4}{19}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{19}}$

四、假设 $\{X_n,n\geq 0\}$ 是一个不可约、非周期、正常返的 Markov 链，其状态空间为 S，极限概率为 $\{\pi_i,i\in S\}$。令 $Y_n=(X_{n-1},X_n),n\geq 1$，请给出 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 的转移概率，并计算 Y_n 的极限概率分布。(用 $\{X_n,n\geq 0\}$ 的转移概率表达。)

此 Markov 链为遍历链 $\pi_i=\frac{1}{\mu_i}$ 这里 $Y_n=(X_{n-1},X_n)$ 是元组

$P((X_n=i,X_{n+1}=j)\mid(X_{n-1}=k,X_n=l))$

① $i\neq l$，不可能 $P((X_n=i,X_{n+1}=j)\mid(X_{n-1}=k,X_n=l))=0$

② $i=l$，$P((X_n=i,X_{n+1}=j)\mid(X_{n-1}=k,X_n=i))$

$$=\frac{P(X_n=i,X_{n+1}=j,X_{n-1}=k)}{P(X_{n-1}=k,X_n=i)}$$

$$=P(X_{n+1}=j\mid X_{n-1}=k,X_n=i)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=P_{ij}$$

即 $\{Y_n,n\geq 1\}=\{(X_{n-1},X_n),n\geq 1\}$ 的转移概率为 $P_{(k,l)(i,j)}=P_{ij}$

极限概率. $P(Y_n=(i,j)\mid Y_1=(k,l))=P(X_{n-1}=i,X_n=j\mid X_0=k,X_1=l)$

$$= \frac{P(X_{n-1}=i, X_n=j, X_0=k, X_1=l)}{P(X_0=k, X_1=l)}$$

$$= \frac{P(X_{n-1}=i, X_n=j, X_0=k, X_1=l)}{P(X_0=k, X_1=l, X_{n-1}=i)} \cdot \frac{P(X_0=k, X_1=l, X_{n-1}=i)}{P(X_0=k, X_1=l)}$$

$$= P(X_n=j \mid X_{n-1}=i, X_0=k, X_1=l) \cdot P(X_{n-1}=i \mid X_0=k, X_1=l)$$

$$= p_{ij} \cdot p_{ki}^{(n-1)} \to p_{ij} \cdot \pi_i \quad (n \to \infty)$$

例 5.1.11

甲乙两人进行某种比赛，设每局甲胜的概率是 p，乙胜的概率是 q，和局的概率是 r，$p+q+r=1$。设每局比赛后，胜者记"+1"分，负者记"−1"分，和局不记分，且当两人中有一人获得 2 分时结束比赛。以 X_n 表示比赛至第 n 局时甲获得的分数，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为时齐 Markov 链，求在甲获得 1 分的情况下，不超过两局可结束比赛的概率。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & \boxed{p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} p_{12}$$

甲 1 ⇒ 乙 −1.

$p_{12}^{(1)} + p_{12}^{(2)} = p + rp$ （甲赢结束）甲=2

$p_{1,-2}^{(1)} + p_{1,-2}^{(2)} = 0$ （乙赢结束）乙=2 ⇒ 甲=−2

例 5.1.12

质点在数轴上的点集 $\{-2,-1,0,1,2\}$ 上做随机游动。质点到达点 −2 后，以概率 1 停留在原处；到达点 2 后，以概率 1 向左移动一点；到达其他点后，分别以概率 $\frac{1}{3}$ 向左、向右移动一点，以概率 $\frac{1}{3}$ 停留在原处。试求在已知该质点处于点 0 的条件下，经三步转移后仍处于点 0 的概率。

$\therefore p_{00}^{(3)} = \frac{2}{27}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & \\ & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \\ & & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & \frac{7}{27} & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

例 5.1.13

（广告效益的推算，详见本书参考文献 [43]）某种啤酒 A 的广告改变了广告方式，经调查发现买啤酒 A 及另外三种啤酒 B，C，D 的顾客每两个月的平均转换率如下（设市场中只有这四种啤酒）：

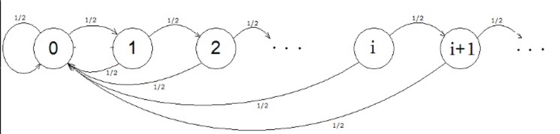
A→A(0.95)　B(0.02)　C(0.02)　D(0.01)
B→A(0.30)　B(0.60)　C(0.06)　D(0.04)
C→A(0.20)　B(0.10)　C(0.70)　D(0.00)
D→A(0.20)　B(0.20)　C(0.10)　D(0.50)

假设目前购买 A，B，C，D 四种啤酒的顾客的分布为（25%，30%，35%，10%），试求半年后啤酒 A 的市场份额。

$$P=\begin{pmatrix}0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01\\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04\\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00\\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50\end{pmatrix} \Rightarrow (0.25, 0.3, 0.35, 0.1)\cdot P^3=(0.62, 0.16, 0.18, 0.04)$$

半年后A的份额为62%！

例5.2.4 证明各状态都是遍历的（非周期、正常返）



显然 $\forall i\in S=\{0,1,2\ldots\}$ 互通，只需证 $\forall i\in S$ 非周期，正常返即可

不妨取 $i=0$，注意到 $f_{00}^{(1)}=1/2$　$f_{00}^{(2)}=(\frac{1}{2})^2$，$f_{00}^{(3)}=(\frac{1}{2})^3\ldots$

$\therefore f_{00}^{(n)}=(\frac{1}{2})^n$，那么 $f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，且

$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^n=2-\frac{n+2}{2^n}\to 2<\infty$，$\therefore 0$为正常返态

自返步数集：$\{n: p_{00}^{(n)}>0\}=\{1,2,3\ldots\}\Rightarrow d(0)=1$. □

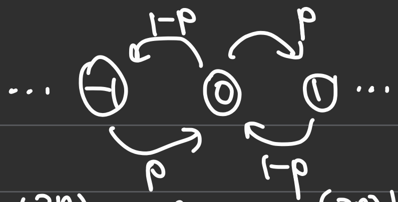
例 5.2.5

考虑直线上无限制的随机游动，状态空间为 $S=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，转移概率为 $p_{i,i+1}=1-p_{i,i-1}=p$ $(i\in S)$。对于状态 0，可知 $p_{00}^{(2n+1)}=0$ $(n=1,2,\cdots)$，即从 0

求 ① 当p满足什么条件时 0为常返态？0为非常返态？

② $p=\frac{1}{2}$时，求 $\lim_{n\to\infty}p_{00}^{(2n)}$，此时0为什么态？

③ $p=\frac{1}{3}$时，求 $\lim_{n\to\infty}p_{00}^{(2n)}$，此时0为什么态？



显然 $p_{00}^{(2n+1)}=0$.

①

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}(1-p)^n p^n=\frac{(2n)!}{(n!)(n!)}(1-p)^n p^n$$

根据 Stirling 公式 $n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$，从而

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!}\sim\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\right)^2}=\frac{2^{2n+\frac{1}{2}}\cancel{n^{2n+\frac{1}{2}}}\cancel{e^{-2n}}\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\cancel{n^{2n+1}}\sqrt{n}\;\cancel{e^{-2n}}\cancel{2\pi}\sqrt{2\pi}}\sim\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

$\therefore p_{00}^{(2n)}\sim\frac{(4(1-p)p)^n}{\sqrt{n}}$，由于 $p(1-p)\le\frac{1}{4}$，

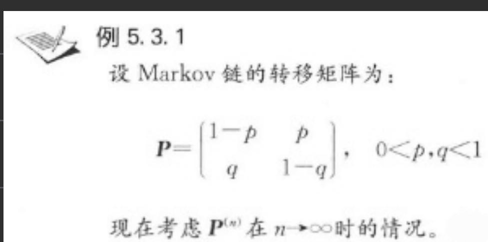
① 当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $p_{00}^{(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\infty\Leftrightarrow$ 0为常返态.

② 当 $0<p<1$ 且 $p\neq\frac{1}{2}$ 时，$\exists\alpha\in(0,1)$

$$p_{00}^{(2n)}\sim\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}<\infty\Leftrightarrow 0\text{为非常返态.}$$

② $p=\frac{1}{2}$ 时，$p_{00}^{(2n)}\to0$，此时n为零常返态 ($p_{00}^{(2n)}\to0$, $\sum p_{00}^{(n)}\to\infty$)

③ $p\neq\frac{1}{2}$ 时，$p_{00}^{(2n)}\to0$，此时n为非常返态 ($p_{00}^{(2n)}\to0$, $\sum p_{00}^{(n)}<\infty$)



例 5.3.1

设 Markov 链的转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix},\quad 0<p,q<1$$

现在考虑 $P^{(n)}$ 在 $n\to\infty$ 时的情况。

根据 C-K 定理 $P^{(n)}=P^n$

对 P 作特征值分解：$\det(P-\lambda I)=0$

$$\det(P-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-p-\lambda & p\\ q & 1-q-\lambda\end{vmatrix}=(1-p-\lambda)(1-q-\lambda)-pq$$

$$=1-q-\lambda-p+\cancel{pq}+p\lambda-\lambda+q\lambda+\lambda^2-\cancel{pq}$$

$$=\lambda^2+(p+q-2)\lambda+1-p-q$$

$$\Delta=(p+q-2)^2-4(1-(p+q))=(p+q)^2-\cancel{4(p+q)}+\cancel{4}-\cancel{4}+\cancel{4(p+q)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{-(p+q-2) \pm (p+q)}{2} = 1 \text{ 或 } 1-p-q$$

求解特征向量 $Px = x \Rightarrow \begin{cases} (1-p)x_1 + p x_2 = x_1 \\ q x_1 + (1-q) x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Px = (1-p-q)x \Rightarrow \begin{cases} (1-p)x_1 + p x_2 = (1-p-q)x_1 \\ q x_1 + (1-q) x_2 = (1-p-q) x_2 \end{cases} \Rightarrow p x_2 + q x_1 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1-p-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{-1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \end{pmatrix} = Q \Lambda Q^{-1}$$

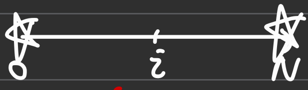
$$P^n = Q \Lambda^n Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{-1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -p(1-p-q)^n \\ 1 & q(1-p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{-1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q+p(1-p-q)^n}{p+q}, & \frac{p-p(1-p-q)^n}{p+q} \\ \frac{q-q(1-p-q)^n}{p+q}, & \frac{p+q(1-p-q)^n}{p+q} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \frac{1}{\mu_0}$$
$$\lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1}{\mu_1}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} q/p+q & p/p+q \\ q/p+q & p/p+q \end{pmatrix}$$

赌徒输光问题。

考虑一赌徒，在每局赌博中他以概率 p 赢一元以概率 $q=1-p$ 输一元，假定各局赌博是独立的，赌徒开始有 i 元，问他的赌金在到达 0(输光)之前达到 N 元的概率是多少。



$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = 1-p \quad p_{00} = 1, \quad p_{NN} = 1$

设 $f_{i,N}$ 为从 i 元赌本到 N 元的概率，则 $\begin{cases} f_{0,N} = 0 \\ f_{i,N} = q f_{i-1,N} + p f_{i+1,N} \\ f_{N,N} = 1, \end{cases}$

$$f_{i,N} = f_{i-1,N}\cdot(1-p) + f_{i+1,N}\cdot p \Rightarrow p(f_{i+1,N}-f_{i,N}) = (1-p)(f_{i,N}-f_{i-1,N})$$

$$\Rightarrow f_{i+1,N}-f_{i,N} = \frac{q}{p}(f_{i,N}-f_{i-1,N}) \qquad 1\le i\le N-1$$

从而 $f_{2,N}-f_{1,N} = \frac{q}{p}(f_{1,N}-f_{0,N})$

$f_{3,N}-f_{2,N} = \frac{q}{p}(f_{2,N}-f_{1,N}) = (\frac{q}{p})^2(f_{1,N}-f_{0,N})$

…

$f_{N,N}-f_{N-1,N} = (\frac{q}{p})^{N-1}(f_{1,N}-f_{0,N})$

$$\Rightarrow f_{i+1,N}-f_{1,N} = f_{1,N}\left((\tfrac{q}{p})+\cdots+(\tfrac{q}{p})^{i}\right)$$

① 若 $q=p=\frac{1}{2}$，则 $f_{i+1,N} = f_{1,N}(i+1)$

② 若 $q\neq p$，则 $f_{i+1,N} = f_{1,N}\left(\frac{1-(q/p)^{i+1}}{1-q/p}\right)$

令 $i=N-1$，则 ① $q=p=\frac{1}{2}$ 时 $f_{N,N}=f_{1,N}\cdot N \Rightarrow f_{1,N}=\frac{1}{N}$

② $q\neq p$ 时，$f_{N,N}=f_{1,N}\cdot\frac{1-(q/p)^N}{1-q/p} \Rightarrow f_{1,N}=\frac{1-q/p}{1-(q/p)^N}$

综上：$f_{i,N}=\begin{cases}\frac{i}{N} & p=q=\frac{1}{2}\\ \frac{\cancel{1-q/p}}{1-(q/p)^N}\cdot\frac{1-(q/p)^i}{\cancel{1-q/p}}=\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & p\neq q.\end{cases}$

当输的概率 q > 赢的概率 p 时，$f_{i,N}=\frac{(q/p)^i-1}{(q/p)^N-1}$，赌本越低赢的概率越小，庄家越大越难赢。

例 假设甲和乙决定扔硬币，扔得离墙更近的人赢（得一枚硬币）。乙是一个更好的玩家，每次以概率 0.6 获胜。

（1）若乙初始财富为 5 枚硬币，而甲初始财富为 10 枚硬币，问乙让甲输光的概率是多少？

（2）若乙初始财富为 10 枚硬币，而甲初始财富为 20 枚，则情况如何？

对于乙：$p=0.6, q=0.4$；① $i=5, N=15 \Rightarrow f_{5,15}=\frac{1-(0.4/0.6)^5}{1-(0.4/0.6)^{15}}=0.87$

② $i=10, N=30 \Rightarrow f_{10,30}=0.98$

例 5.3.6

设甲袋中有 k 个白球和 1 个黑球，乙袋中有 $k+1$ 个白球，每次从两袋中各任取一球，交换后放入对方的袋中。证明经过 n 次交换后，黑球仍在甲袋中的概率 p_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$。

$$P=\begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{k}{k+1} \end{pmatrix} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2} \quad ✓$$

甲袋有黑球中 ⇒ 1，否则 0 ⇒ $\{X_n, n\ge 0\}$

$$p_{00}=\frac{k}{k+1},\quad p_{01}=\frac{1}{k+1},\quad p_{10}=\frac{1}{k+1},\quad p_{11}=\frac{k}{k+1}$$

$$\pi P=\pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{k}{k+1}\pi_0 + \frac{1}{k+1}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{k}{k+1}\pi_1 + \frac{1}{k+1}\pi_0 \end{cases} \Rightarrow \pi_0=\pi_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \mu_1=\frac{1}{\pi_1}=2$$

例（奖惩系统（Bonus-malus System，简记为 **BMS**））。

表 1　转移概率矩阵

	c_1=0.7	c_2=0.8	c_3=0.9	c_4=1
c_1=0.7	p_0	p_1	p_2	$1-p_0-p_1-p_2$
c_2=0.8	p_0		p_1	$1-p_0-p_1$
c_3=0.9		p_0		$1-p_0$
c_4=1			p_0	$1-p_0$

其中 p_i 表示一年里的索赔 i 次的概率。

计算长时间之后的平均费率系数。

假设:

（1）保单组合中不会有新增保单，也不会有退保保单；

（2）在初次投保时，保单组合中的每份保单缴纳完全相同的保险费，均不享受保费折扣。

（3）**如果进一步假设给定个体保单的索赔次数服从泊松分布**，则有

$$p_k=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

若假设投保人的索赔频率为 λ=0.5，即平均每两年索赔一次，则

$$p_0=0.6065,\quad p_1=0.3033,\quad p_2=0.0758$$

$$\pi P=\pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.6065\pi_1 + 0.6065\pi_2 \\ \pi_2 = 0.3033\pi_1 + 0.6065\pi_3 \\ \pi_3 = 0.0758\pi_1 + 0.3033\pi_2 + 0.6065\pi_4 \\ \pi_4 = 0.0144\pi_1 + 0.0902\pi_2 + 0.3935(\pi_3+\pi_4) \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.3692 \\ \pi_2 = 0.2396 \\ \pi_3 = 0.2103 \\ \pi_4 = 0.1809 \end{cases}$$

平均费率 $E[C] = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*)\begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.8203$

例 5.17（在遗传学中的马尔科夫链及哈代—温伯格律）

考察一个个体数非常大的群体。

$p \quad q \quad r$

每个个体有一特殊的基因对分别是 AA，aa 或 Aa；

假定个体的对应比例分别为 p，q 和 r，$p+q+r=1$；

假定每个个体等可能地与其他任意一个个体结合，当两个个体结合时，它们会随机的各自传给后代一个基因。

计算各代中有基因对 AA，aa 或 Aa 的个体在总体中的百分比。

$AA \quad Aa \quad aa$

设 X_n 为第n代后代的基因型，则 $X_n \in S=\{1,2,3\}$

转移概率：$p_{11}=P(AA\to AA)=p+\frac{1}{2}r$ （$X_0=AA$，结合 Aa 或 AA）

$p_{12}=P(AA\to Aa)=\frac{1}{2}r+q$ （$X_0=AA$，结合 Aa 或 aa）

$p_{13}=P(AA\to aa)=0$

$p_{21}=P(Aa\to AA)=\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}r$，$p_{22}=P(Aa\to Aa)=\frac{1}{2}(q+\frac{1}{2}r)+\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2}r)$

$=\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}$

$p_{23}=P(Aa\to aa)=\frac{1}{2}(q+\frac{1}{2}r)$ $p_{31}=P(aa\to AA)=0$，$p_{32}=P(aa\to Aa)=p+\frac{1}{2}r$

$p_{33}=P(aa\to aa)=q+\frac{1}{2}r$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} p+\frac{1}{2}r & q+\frac{1}{2}r & 0 \\ \frac{1}{2}p+\frac{1}{4}r & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q+\frac{1}{4}r \\ 0 & p+\frac{1}{2}r & q+\frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$ （这是从 $X_0\to X_1$）

$2pq+\frac{1}{2}r(p+q+1)=2pq+\frac{1}{2}r(2-r)$

$=2pq+r-\frac{1}{2}r^2=2(pq+\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}r^2)$

那么 X_1 代的分布为

$(p,r,q)P=(p^2+pr+\frac{1}{4}r^2,\ 2pq+\frac{1}{2}pr+\frac{1}{2}qr+\frac{1}{2}r,\ q^2+qr+\frac{1}{4}r^2)$

$AA \quad Aa \quad aa$

$=((p+\frac{1}{2}r)^2,\ 2(p+\frac{1}{2}r)(q+\frac{1}{2}r),\ (q+\frac{1}{2}r)^2)$

$\triangleq(\alpha,\ \gamma,\ \beta)$

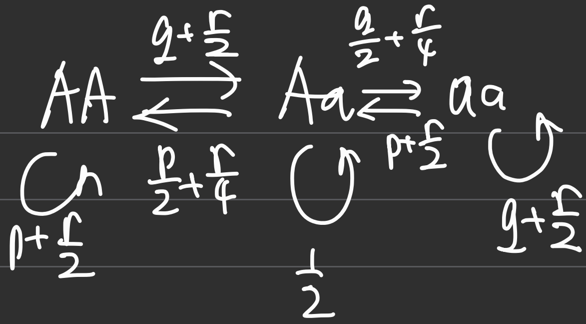
$2(pq+\frac{1}{2}(p+q+r)r-\frac{r^2}{4})$

$=2(pq+\frac{p+q}{2}r+\frac{r^2}{4})$

从 $X_1\to X_0$ 时 $p_{11}=\alpha+\frac{1}{2}\gamma=(p+\frac{1}{2}r)^2+(p+\frac{1}{2}r)(q+\frac{1}{2}r)$ $=2(p+\frac{r}{2})(q+\frac{r}{2})$

$=(p+\frac{1}{2}r)(p+\frac{1}{2}r+q+\frac{1}{2}r)=p+\frac{1}{2}r$

$\therefore$ 转移矩阵保持不变！

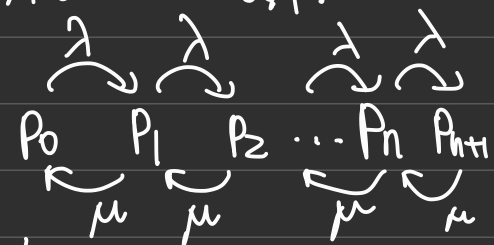


这是个 $d=1$，正常返、互通的 Markov链 ⇒ 遍历链
平稳分布 = 极限分布. 那么

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1\left(p+\frac{r}{2}\right) + \pi_2\left(\frac{p}{2}+\frac{r}{4}\right) \\ \pi_2 = \pi_1\left(q+\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3\left(p+\frac{r}{2}\right) \\ \pi_3 = \pi_2\left(p+\frac{r}{2}\right) + \pi_3\left(q+\frac{r}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = \Big(\underset{AA}{\underset{\Uparrow}{\left(p+\tfrac{1}{2}r\right)^2}},\ \underset{Aa}{\underset{\Uparrow}{2\left(p+\tfrac{1}{2}r\right)\left(q+\tfrac{1}{2}r\right)}},\ \underset{aA.}{\underset{\Uparrow}{\left(q+\tfrac{1}{2}r\right)^2}}\Big)$$

例:
高速公路入口收费处设有$\boxed{\text{一个}}$收费通道, → M/M/1
汽车到达服从Poisson分布，平均到达速率为100辆 / 小时，
收费时间服从指数分布，平均收费时间为15秒 / 辆。
求收费处空闲的概率.



$\lambda=100$, $15=\frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu=\frac{1}{15}$ 辆/秒 $=\frac{1}{15}\times 60\times 60 = 240$ 辆/小时.

建立转移状态方程

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ P_{n-1}\lambda + P_{n+1}\mu = (\mu+\lambda)P_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P_1}{P_0} = \frac{\lambda}{\mu} \\ \lambda\frac{P_{n-1}}{P_n} + \mu\cdot\frac{P_{n+1}}{P_n} = (\mu+\lambda) \end{cases}$$

$$\mu(P_{n+1}-P_n)=\lambda(P_n-P_{n-1}) \Rightarrow P_{n+1}-P_n=\frac{\lambda}{\mu}(P_n-P_{n-1})$$

$$P_2-P_1=\frac{\lambda}{\mu}\cdot(P_1-P_0)$$

$$P_3-P_2=\frac{\lambda}{\mu}(P_2-P_1)=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2(P_1-P_0)$$

$$\vdots$$

$$P_n-P_{n-1}=\frac{\lambda}{\mu}(P_{n-1}-P_{n-2})=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}(P_1-P_0)$$

$$\Rightarrow P_n-P_1=(P_1-P_0)\left(\frac{\lambda}{\mu}+\cdots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow P_n=(P_1-P_0)\left(1+\cdots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\right)+P_0$$

$$=\cancel{\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)}P_0\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\cancel{1-\frac{\lambda}{\mu}}\ \frac{\lambda}{\mu}-1}\right)+P_0$$

$$=P_0\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n-1\right)+P_0=P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n，记\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{12}$$

$$又\ \sum_{i=0}^{\infty}P_i=1 \Rightarrow P_0(1+\rho+\cdots)=P_0\frac{1}{1-\rho}=1$$

$$\Rightarrow P_0=(1-\rho)=\frac{7}{12}$$

∴ 系统的空闲概率为 $P_0=\frac{7}{12}$

5.2 某人有 r 把伞用于上下班，如果一天开始时他在家（一天结束时他在办公室）而且天下雨，只要有伞可取到，他将拿一把到办公室（家）中。如果天不下雨，那么他不带伞，假设每天的开始（结束）下雨的概率为 p，不下雨的概率为 q，且与过去情况独立。

（1）定义一个有 $r+1$ 种状态的 Markov 链并确定转移概率；

（2）计算极限分布；

（3）他被淋湿的平均次数所占比例是多少？（如果天下雨而伞全部在另一处，那么称他被淋湿。）

(1) 第n天家里有$\{X_n, n\geq1\}$把伞 则 $S=\{0,1,2,\cdots,r\}$，

状态0： $0\to0$（不下雨）：q　$0\to1$（下雨）：p

状态1： $1\to0$（上班下雨，下班无雨）pq，

$1\to1$（上班下雨，下班下雨 / 上班无雨，下班无雨）p^2+q^2

$1\to 2$ (上班无雨, 下班下雨) pq.

状态2: $2\to 1$ (上班下雨, 下班无雨) pq

$2\to 2$ (上班下雨, 下班下雨 / 上班无雨, 下班无雨) p^2+q^2

$2\to 3$ (上班无雨, 下班下雨) pq.

…,

状态r: $r\to r-1$ (上班下雨, 下班无雨): pq

$r\to r$ (上班无雨, 下班有雨或无雨); $qp+q^2+p^2$

(上班下雨, 下班下雨) $= q^2+p$

以此类推, 转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} q & p & & & & \\ pq & p^2+q^2 & pq & & & \\ & pq & p^2+q^2 & pq & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & pq & p^2+q^2 & pq \\ & & & & pq & \underset{p+q^2}{\cancel{p^2+q^2}} \end{pmatrix}_{(r+1)\times(r+1)}$$

(2)
$$\begin{cases} \pi_0 = q\pi_0 + pq\pi_1 \\ \pi_1 = p\pi_0 + (p^2+q^2)\pi_1 + pq\pi_2 \\ \pi_i = pq\pi_{i-1} + (p^2+q^2)\pi_i + pq\pi_{i+1} \quad (2\le i\le r-1) \\ \pi_r = pq\pi_{r-1} + (p^2+q^2)\pi_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = q\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_2 \\ 2\pi_i = \pi_{i-1} + \pi_{i+1} \Rightarrow 2\pi_{r-1} = \pi_{r-2} + \pi_r \Rightarrow \pi_{r-2} = \pi_{r-1} \\ \pi_r = \pi_{r-1} \end{cases}$$

以此类推 $\pi_0 = q\pi_1 = \dfrac{q}{r+q}$, $\pi_1 = \cdots = \pi_{r-1} = \pi_r = \dfrac{1}{r+q}$

$\therefore$ 平稳分布 $\left(\frac{q}{r+q}, \frac{1}{r+q}, \dots, \frac{1}{r+q}\right)$，又因为该 Markov 链为遍历链，因此极限分布就是平稳分布

(3) 淋湿：家中0把伞，上班下雨，家中r把伞，上班下雨下班下雨

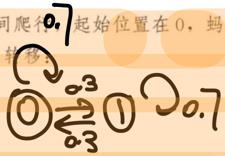
$$\pi_0 \quad\quad p \quad\quad \pi_r \quad\quad pq$$

所以淋湿概率为 $\dfrac{\frac{q}{r+q}\cdot p + \frac{1}{r+q}\cdot qp}{2} = \dfrac{qp}{r+q}$

5.5 设一只蚂蚁在直线上爬行，原点处一只蜘蛛在等待捕食，N 处有一挡板，蚂蚁到 N 后只能返回。设蚂蚁向左爬和向右爬的概率分别为 p 和 $1-p$。证明：蚂蚁被吃掉的概率为 1。

5.6 上题中设 $N=1$，但蜘蛛也在 0～1 之间爬行，起始位置在 0，蚂蚁的初始位置在 1，蜘蛛和蚂蚁分别依如下转移矩阵在 0～1 之间转移：

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



(1) 求在时刻 n，蜘蛛和蚂蚁分别处于 0 和 1 的概率；

(2) 捕捉过程需要的平均时间为多长（设蚂蚁不会在途中被吃掉)?

转移矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ p & 0 & 1-p & & \\ & p & 0 & 1-p & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p & 0 & 1-p \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $\pi P = \pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_i = (1-p)\pi_{i-1} + p\pi_{i+1} \Rightarrow \pi_i = \pi_{i+1} \\ \pi_{N-1} = (1-p)\pi_{N-1} + \pi_N \Rightarrow \pi_{N-1} = 0 \\ \pi_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \cdots = \pi_N = 0 \\ \pi_0 = 1, \text{必被吃} \end{cases}$

(2) ① 设蜘蛛，蚂蚁在时刻n时位置为 X_n, Y_n，注意，它们不能相遇！

$$P(X_n=0, Y_n=1) = P(X_n=0, Y_n=1 \mid X_{n-1}=1, Y_{n-1}=0)\, P(X_{n-1}=1, Y_{n-1}=0)$$
$$+ P(X_n=0, Y_n=1 \mid X_{n-1}=0, Y_{n-1}=1)\, P(X_{n-1}=0, Y_{n-1}=1)$$

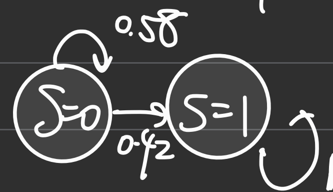
记 $a_n = P(X_n=0, Y_n=1)$，$b_n = P(X_n=1, Y_n=0)$，则

$$a_n = 0.09 b_{n-1} + 0.49 a_{n-1}$$
类似地 $b_n = 0.09 a_{n-1} + 0.49 b_{n-1}$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 0.58(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ a_n - b_n = 0.4(a_{n-1} - b_{n-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n+b_n=(0.58)^n \\ a_n-b_n=(0.4)^n \end{cases} \Rightarrow a_n = P(X_n=0, Y_n=1) = \frac{0.58^n+0.4^n}{2}$$

② "吃掉时"要么 $X_n=Y_n=0$，要么 $X_n=Y_n=1$. 设 $\{S_n\}$ 为吃掉与否的状态，则 $S_n \in S=\{0,1\}$，且转移矩阵为

(0为没有，1为吃掉) $P' = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.42 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$P(X_n=Y_n=1 \mid X_n=1, Y_n=0) + P(X_n=Y_n=0 \mid X_n=1, Y_n=0) = 0.21+0.21=0.42$$
$$P(X_n=Y_n=1 \mid X_n=0, Y_n=1) + P(X_n=Y_n=0 \mid X_n=0, Y_n=1) = 0.42$$

蚂蚁被吃掉的平均时间 $= \mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{01}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \boxed{0.42(0.58)^{n-1}}$ $\Downarrow$ 几何分布

显然 $S_n \sim Geom(0.42)$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{0.42}$

5.20 设甲、乙两个容器共有 $2N$ 个球，每隔单位时间从这 $2N$ 个球中任取一球放入另一容器中，记 X_n 为在时刻 n 甲容器中球的个数，则 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是齐次 Markov 链，称为 Erenfest 链，求该链的平稳分布。

$$P(X_{n+1}=k+1 \mid X_n=k) = \frac{2N-k}{2N}$$
$$P(X_{n+1}=k-1 \mid X_n=k) = \frac{k}{2N}$$
$$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0)=1, \quad P(X_{n+1}=2N-1 \mid X_n=2N)=1$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & & & \\ & \frac{2}{2N} & 0 & \frac{2N-2}{2N} & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \frac{2N-1}{2N} & 0 & \frac{1}{2N} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求解 $\pi P=\pi$ 略

5.11 假定一生物群体中的各个个体以指数率 λ 出生，以指数率 μ 死亡，另外还存在由迁入引起的指数增长率 θ，试对此建立一个生灭模型。

$$P(X(t+h)=k+1 \mid X(t)=k) = (k\lambda+\theta)h+o(h)$$

$$P(X(t+h)=k-1 \mid X(t)=k) = k\mu h+o(h)$$

$$P(X(t+h)=k \mid X(t)=k) = 1-(k\lambda+\theta+k\mu)h+o(h)$$

$$\Rightarrow \quad q_{k,k+1} = k\lambda+\theta, \quad q_{k,k-1} = k\mu. \quad q_{k,k} = k(\lambda+\mu)+\theta$$

Kolmogorov 向前向后：

向前 $\quad P_{ij}'(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\, q_{kj} - P_{ij}(t)\, q_{jj} = \cdots$

向后 $\quad P_{ij}'(t) = \sum_{k\neq j} q_{ik} P_{kj}(t) - q_{ii} P_{ij}(t) = \cdots$

5.12 在习题 5.11 中假设当群体总数是 N 或更多时，就不允许迁入，建立一个生灭模型。

$$q_{k,k+1} = k\lambda+\theta, \quad q_{k,k} = k(\lambda+\mu)+\theta, \quad q_{k,k-1} = k\mu. \quad (k\leq N-1)$$

$$q_{k,k+1} = k\lambda \quad q_{k,k} = k(\lambda+\mu) \quad q_{k,k-1} = k\mu \quad (k>N)$$

5.13 考虑有两种状态的连续时间 Markov 链，状态为 0 和 1，链在离开 0 到达 1 之前在状态 0 停留的时间服从参数为 λ 的指数分布，相应地在 1 停留的时间是参数为 μ 的指数变量。对此建立 Kolmogorov 微分方程，并求解。

$$P_{01}(h) = \lambda h+o(h) \quad P_{00} = 1-\lambda h+o(h) \quad P_{10}(h) = \mu h+o(h), \quad P_{11}(h) = 1-\mu h+o(h)$$

$$\Rightarrow q_{00} = q_{01} = \lambda, \quad q_{10} = q_{11} = \mu.$$

向前 $\quad P_{ij}'(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\, q_{kj} - P_{ij}(t)\, q_{jj} \qquad P_{00}(0)=1, \quad P_{01}(0)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{01}'(t) = P_{00}(t)\,q_{00} - P_{01}(t)\,q_{11} = \lambda P_{00}(t) - \mu P_{01}(t) = \lambda-(\lambda+\mu)P_{01}(t) \\ P_{00}'(t) = P_{01}(t)\,q_{10} - P_{00}(t)\,q_{00} = \mu P_{01}(t) - \lambda P_{00}(t) = \mu-(\lambda+\mu)P_{00}(t) \\ P_{11}'(t) = P_{10}(t)\,q_{01} - P_{11}(t)\,q_{11} = \lambda P_{10}(t) - \mu P_{11}(t) = \lambda-(\lambda+\mu)P_{11}(t) \\ P_{10}'(t) = P_{11}(t)\,q_{11} - P_{10}(t)\,q_{00} = \mu P_{11}(t) - \lambda P_{10}(t) = \mu-(\lambda+\mu)P_{10}(t) \end{cases}$$

六、(10 分) 一个人群中共有 N 个个体，其中一些成员受病毒感染，其传播方式如下：群体中的两个成员之间按速率为 λ 的泊松过程接触，每一次接触等可能地涉及在总体中的 $\binom{N}{2}$ 对成员中的任意一对。如果一次接触涉及一个受感染的与一个没有受感染的成员，那么没有感染者将变成受感染者，一旦受到感染，该成员始终保持受感染。以 $X(t)$ 表示群体在时刻 t 受感染成员的个数。

(1) 请写出 Markov 链$\{X(t),t\geq 0\}$的转移速率矩阵Q；

$i\mu h$ 而非 μh !!!

(2) 假定受感染成员在感染后立即服药，每个成员的治愈时间相互独立且服从参数为 μ 的指数分布，治愈时间与感染相互独立，请写出 Markov 链$\{X(t),t\geq 0\}$的转移速率矩阵Q。

(1) $P(X(t+h)=i+1 \mid X(t)=i) = \lambda h \cdot \boxed{\dfrac{i(N-i)}{\binom{N}{2}}} + o(h)$ → 感染人数对占比

$p_{i,i+1}(h) = \lambda h \dfrac{i(N-i)}{\binom{N}{2}} + o(h)$

$p_{N,N}(h)=1$

$p_{i,i}(h) = 1-\lambda h \dfrac{i(N-i)}{\binom{N}{2}} + o(h)$

$\Rightarrow$ Q矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & -\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & & & \\ & & -\frac{\lambda\cdot 2(N-2)}{C_N^2} & \frac{\lambda\cdot 2(N-2)}{C_N^2} & & \\ & & & \ddots & -\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P_{i,i-1}(h) = i\mu h + o(h)$, $\quad P_{i,i}(h) = 1-\left(i\mu+\lambda\dfrac{i(N-i)}{C_N^2}\right)h + o(h)$

$\Rightarrow$ Q矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ \mu & -\left(\mu+\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2}\right) & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} & & \\ & 2\mu & -\left(2\mu+\frac{\lambda\cdot 2(N-2)}{C_N^2}\right) & \frac{\lambda\cdot 2(N-2)}{C_N^2} & \\ & & \ddots & & \\ & & (N-1)\mu & -\left((N-1)\mu+\frac{\lambda(N-1)}{C_N^2}\right) & \frac{\lambda(N-1)}{C_N^2} \\ & & & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}$$

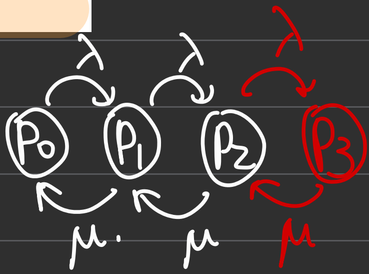
六、(10 分) 潜在顾客到达加油站，且到达服从参数为 8 的泊松分布。然而，只有在加油站有不超过两辆车（包括目前正在加油的车辆）的情况下，顾客才会进入加油站加油。假设为一辆汽车加油所需的时间服从参数为 2 的指数分布，试求：

(1) 员工给汽车加油的时间比例；

(2) 潜在顾客流失的比例。

加油站最多容纳3辆车!

(1) $\lambda=8 \quad \mu=2.$



$$\begin{cases} 8P_0=2P_1 \\ 8P_0+2P_2=10P_1 \\ 8P_1+2P_3=10P_2 \\ 8P_2=2P_3 \\ P_0+P_1+P_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0=\cancel{\frac{1}{21}}\ \frac{1}{85} \\ P_1=\cancel{\frac{4}{21}}\ \frac{4}{85} \\ P_2=\cancel{\frac{16}{21}}\ \frac{16}{85} \\ P_3=\frac{64}{85} \end{cases}$$

$\therefore$ 加油的时间比例为 $1-\cancel{\frac{1}{21}}\frac{1}{85}=\cancel{\frac{20}{21}}\ \frac{84}{85}$

(2) $\frac{64}{85}$ $\cancel{\frac{16}{21}}$ 的时间系统内有 3 ~~2~~ 辆车，其他车进不来

潜在顾客流失比例为 $\frac{64}{85}$

五、(15 分) 设有 6 个球（其中 2 个红球，4 个白球）分放于甲、乙两个盒子中，每盒放 3 个，每次从两个盒中各任取一球并进行交换，以 X_0 表示开始时甲盒中红球的个数，X_n $(n\ge 1)$ 表示经过 n 次交换后甲盒中的红球数。

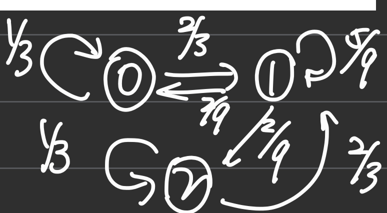
(1) 计算该马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 1\}$的转移概率矩阵P；

(2) 证明该马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 1\}$是遍历链；

(3) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

$S=\{0,1,2\}$

(1) $$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



(2) $A=\{n: P_{ii}^{(n)}>0\}=\{1,2,3\ldots\} \Rightarrow d=1$, ✓

所有状态互通 ✓

所有状态均为正常返：$\mu_0=\frac{1}{3}\cdot 1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}\cdot n<\infty$

$$\mu_1 = \frac{5}{9}\cdot 1\cdot 1 + \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\right)\times 2 + \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\right)\times 3+\cdots$$

$$= \frac{5}{9} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\times 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot n < \infty$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3}\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} < \infty \quad \checkmark$$

$\therefore \{X_n, n\geq 0\}$ 为遍历链

(2) 稳态分布 $\Leftrightarrow$ 极限分布：

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{2}{9}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{5}{9}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{2}{9}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{5} \\ \pi_1 = \frac{3}{5} \\ \pi_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\therefore P \to \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

五、**(15 分)** 一个盒子里总是有两个球，球的颜色是红色和蓝色。在每个阶段，随机选择一个球，然后用一个新的球替换，替换为相同颜色的球的概率为 0.6，替换为相反颜色的球的概率为 0.4。如果最初两个球都是红色的，设 X_n 定义为在第 n 次选择和随后的替换之后，盒子中红色球的数量，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是马尔可夫链。

(1) 求转移概率矩阵；

(2) 求极限概率； 记为事件 A_3

(3) 求选定的第三个球是红色的概率。

$S=\{0,1,2\}$

(1) $$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(2) $$\pi P = \pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0.6\pi_0 + 0.2\pi_1 \\ \pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.6\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.6\pi_2 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

遍历链 $\Rightarrow$ 极限分布 $\Leftrightarrow$ 平稳分布

$(3)\ P(A_3) = P(A_3|X_3=0)P(X_3=0) + P(A_3|X_3=1)P(X_3=1) + P(A_3|X_3=2)P(X_3=2)$

$\vec{P_0} = \big(P(X_0=0), P(X_0=1), P(X_0=2)\big) = (0,0,1)$

$\vec{P_0}\, P^{\cancel{3}\,2} = (0, 0.4, 0.6)\, P^{\cancel{2}\,1} = (0.08, 0.48, 0.44)\ \cancel{P = (0.144, 0.496, 0.36)}$

$\therefore P(A_3) = 0 + \frac{1}{2} \times \underset{0.48}{\cancel{0.496}} + 1 \times \underset{0.44}{\cancel{0.36}} = \cancel{0.608}\ 0.68$

五、**(15 分)** 假设有 N 台机器，每台机器的使用寿命相互独立且都服从参数为 μ 的指数分布。设 $X(t)$ 表示在 t 时刻能使用的机器台数。

（1）（7 分）证明：在 t 时刻有 j 台机器能使用的条件下，时间 $(t, t+\Delta t)$ 内有一台机器不能使用的概率为 $j\mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$；

（2）（8 分）假定机器不能使用时就立即进行维修，每台机器的维修时间相互独立且服从为参数为 μ 的指数分布，维修时间与使用寿命也相互独立。请写出 Markov 链 $\{X(t), t \ge 0\}$ 的转移强度矩阵 Q。

解：(1) 证明：$P(X(t+\Delta t) - X(t) = -1 \mid X(t) = j) = C_j^1 p(1-p)^{j-1}$

其中 $p = P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1 \mid N(t) = 0) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$，$N(t)$ 表示一个泊松过程。因此

$P(X(t+\Delta t) - X(t) = -1 \mid X(t) = j) = j\mu\Delta t + o(\Delta t)$。

(2)

若时齐的连续时间Markov链$\{X(t), t \ge 0\}$满足:

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = (N-i)\mu\Delta t + o(\Delta t);\ i = 0,1,2,\dots,N-1$$

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = i\mu\Delta t + o(\Delta t); i = 1,2,\dots,N$$

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (i\mu + (N-i)\mu)\Delta t + o(\Delta t) = 1 - N\mu\Delta t + o(\Delta t); i = 0,1,2,\dots,N$$

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad |i-j| \ge 2.$$

因此相应的 Q 矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -N\mu & N\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -N\mu & (N-1)\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -N\mu & (N-2)\mu & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (N-2)\mu & -N\mu & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (N-1)\mu & -N\mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N\mu & -N\mu \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

Renewal Process

例 4.1.1 考虑一个时间离散的计数过程$\{N_j, j=1,2,\cdots\}$，在每个时刻独立地做伯努利试验，设成功的概率为p，失败的概率为$q=1-p$。以试验成功作为事件(更新)，则此过程是更新过程，求它的更新函数$M(k)$。

更新间隔 $X_n \sim Geom(p) \Rightarrow P(X_n=k)=q^{k-1}p$

第r次成功的发生时刻 $T_r=\sum_{k=1}^{r} X_k \sim Pascal(r,p) \Rightarrow P(T_r=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r}$

$$\Rightarrow P(T_r\le n)=\sum_{k=0}^{n} P(T_r=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$$

$$M(t)=E[N(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)\ge n)=\sum_{n=0}^{\infty}(T_n\le t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{t}\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$$

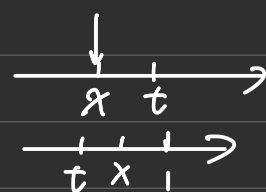
例 假设有一个更新过程，其时间间隔服从**[0,1]** 上的均匀分布。计算当$t\le 1$时，其对应的更新函数$M(t)$。

求更新函数 ① 关于$X_1=x$取期望 ② 找积分方程

$X_n\sim Unif[0,1]$

$$M(t)=E[N(t)]=\int_0^1 E[N(t)|X_1=x]f_{X_1}(t)\,dt$$

其中 $E[N(t)|X_1=x]=\begin{cases}1+E[N(t-x)] & 0\le x<t\\ 0 & t<x\le 1\end{cases}$



$$\therefore M(t)=\int_0^t\big(1+E[N(t-x)]\big)\cdot 1\,dx = t+\int_0^t M(t-x)\,dx$$

~~根据更新定理 $M(t)=t+\int_0^t (t-x)\,dM(x)$~~ 不需要，反而变复杂了

$$M(t)=t+\int_t^0 M(y)\,d(t-y)=t+\int_0^t M(y)\,dy$$

$$\Rightarrow M'(t)=1+M(t)\Rightarrow \frac{dM(t)}{dt}=1+M(t)\Rightarrow \frac{dM(t)}{1+M(t)}=dt$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{1+M(t)}\,dM(t)=\int 1\,dt\Rightarrow \ln|M(t)+1|=t\Rightarrow M(t)=Ce^t-1$$

由于 $M(0)=E[N(0)]=0$，因此 $M(0)=C-1=0\Rightarrow M(t)=e^t-1$ $(0\le t\le 1)$

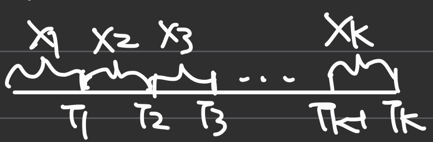
例(火车的调度)　设乘客到达火车站形成一个更新过程，其更新间距分布 F 有有限期望 μ。现设车站用如下方法调度火车：当有 K 个乘客到达车站时发出一列火车。同时还假定当有 n 个旅客在车站等候时车站每单位时间要付出 nc 元偿金，而开出一列火车的成本是 D 元。求车站在长期运行下单位时间的平均成本。

更新回报定理的应用

$E[X_n]=\mu$. K个乘客发一班车 $\Rightarrow T=K\mu$

长期运行下的单位时间平均成本 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t}=\frac{E[C_t]}{E[X_1]}$ 一个周期内的成本 / 一个周期

成本 $C_t=X_1\cdot 0+X_2\cdot c+\cdots+X_K(K-1)c=c(X_2+2X_3+\cdots+(K-1)X_K)$



$E[C_t]=c\mu(1+2+\cdots+K-1)=c\mu\cdot\frac{K(K-1)}{2}$

$\therefore$ 平均成本 $\Rightarrow \dfrac{c\mu\frac{K(K-1)}{2}+D}{K\mu}=\dfrac{c(K-1)}{2}+\dfrac{D}{K\mu}$

例 4.3.1

某控制器用一节电池供电，设电池寿命 X_i $(i=1,2,\cdots)$ 服从均值为 45 小时的正态分布，电池失效时需要去仓库领取，领取新电池的时间 Y_i $(i=1,2,\cdots)$ 服从期望为 0.5 小时的均匀分布。求长时间工作时控制器更换电池的速率。

$E[X_i]=45$, $E[Y_i]=0.5$　记更换电池次数为 $N(t)$，则更换总耗时为 t

速率 $\Rightarrow \cancel{\frac{E[X_i]}{E[Y_i]}=90}$ $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{E[t]}=\frac{1}{E[X_i]+E[Y_i]}=\frac{1}{45.5}$

例 4.3.2

设有一个单服务员银行，顾客到达可看作速率为 λ 的 Poisson 分布，服务员为每一位顾客服务的时间是随机变量，服从均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的指数分布。顾客到达门口只有在服务员空闲时才准进入银行。试求：

（1）顾客进银行的速率；

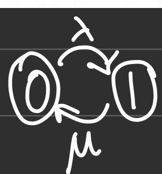
（2）服务员工作的时间占营业时间的比例。

参数为 μ.

一个周期进一次银行

(1) $\dfrac{1}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$

一个周期平均耗时

(2) 

$\begin{cases}\lambda P_0=\mu P_1\\ P_0+P_1=1\end{cases}\Rightarrow \frac{\mu}{\lambda}P_1+P_1=1\Rightarrow P_1=\dfrac{1}{\frac{\mu}{\lambda}+1}=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

占营业时间比例为 $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

例 4.3.3

考虑离散时间的更新过程 $N(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，在每个时间点独立地做 Bernoulli 试验，设试验成功的概率为 p，失败的概率为 $q=1-p$，以试验成功作为更新事件，并以 $M(n)$ 记此过程的更新函数，求其更新率 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}$。

更新间隔 $X_n \sim Geom(p) \Rightarrow P(X_n=k)=q^{k-1}p \Rightarrow E[X_n]=\frac{1}{p}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}=\frac{1}{1/p}=p$

例 4.3.4

两个呼叫间隔为 $1/\lambda$

某电话交换台的电话呼叫次数服从平均 1 分钟 λ 次的 Poisson 过程，通话时间 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是相互独立且服从同一分布的随机变量序列，满足 $E(Y_1)<\infty$，假定通话时电话打不进来，用 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止电话打进来的次数，试证

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\frac{\lambda}{1+\lambda E(Y_1)}$$

一个周期内：① 一通电话；

② 上一通电话挂断到下一通电话接起到下一通电话结束的时间间隔：$\frac{1}{\lambda}+E[Y_i]$

根据更新间隔定理，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+E[Y_i]}=\frac{\lambda}{1+\lambda E[Y_i]}$

$\left(N(t)=\sum_{t=1}^{M(t)}1(\text{不在通话时间内}),\ \{M(t),t\geq 0\}\text{为 Poisson 过程}\right)$

例 4.4.1 （产品保修策略）假设某产品一旦损坏，顾客立刻更换、退换或者购买新的。设新产品售价为 c，成本为 $c_0<c$，产品寿命为 X，它的分布函数为 $F_X(t)$，$E(X)=\mu<+\infty$。

设某公司出售该商品采取如下更换策略：

(1) 若产品售出后，在期限 w 内损坏，则免费更换同样的产品，但优惠时间不重新开始，即下一次免费更换的优惠时间为 $w-X$；

(2) 若在 $(w,w+T]$ 期间损坏，则按时间折价更换新产品，且优惠时间重新开始，即下一次免费更换的优惠时间还是 w；

(3) 若在 T 时间之后损坏，则顾客需要原价购买新产品，且优惠时间重新开始。

请讨论长期执行此策略对厂家的影响（即厂家的期望利润是多少）。

见笔记

厂家期望成本：$\frac{c_0(M(w)+1)}{\mu(M(w)+1)}=\frac{c_0}{\mu}$

厂家期望收益

$=\int_w^{w+T}c\cdot\frac{t-w}{T}dG(t)+\int_{w+T}^{\infty}c\,dG(t)$

$=\frac{c}{T}\int_w^{w+T}(t-w)dG(t)+c\,\overline{G}(w+T)$

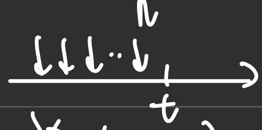
4.1 判断下列命题是否正确：

(1) $N(t)<n \Leftrightarrow T_n>t$；

(2) $N(t)\leqslant n \Leftrightarrow T_n\geqslant t$；

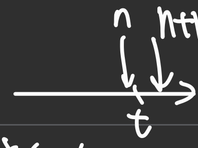
(3) $N(t)>n \Leftrightarrow T_n<t$。

(1) √ (2)



× $\not\Rightarrow (T_n<t)$

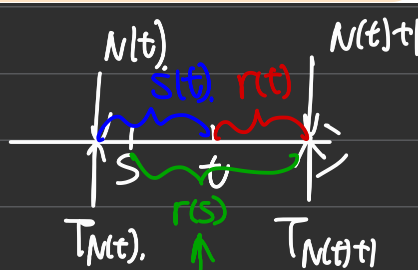
(3)



× $\not\Leftarrow (N(t)=n)$

4.9 对更新过程，证明 $P\{T_{N(t)}\leqslant s\}=\bar F(t)+\int_0^s \bar F(t-y)\,dM(y)$ 对任意 $t\geqslant s\geqslant 0$ 成立，其中 $\bar F(t)=1-F(t)$。

(做法不一样)(用剩余年龄的分布转换)



当 $s\le t$ 时，$\{T_{N(t)}\le s\} \Leftrightarrow \{S(t)\ge t-s\}$

而 $\{S(t)\ge x,\ r(t)\ge y\} \Leftrightarrow \{r(t-x)\ge x+y\}$.

$\Downarrow$ $[t-x, t]$无更新 $\quad$ $\Downarrow$ $[t, t+y]$无更新.

$\Rightarrow \{S(t)\ge x\} = \{S(t)\ge x,\ r(t)\ge 0\} \Leftrightarrow \{r(t-x)\ge x\}$

因此 $\{S(t)\ge t-s\} \Leftrightarrow \{r(t-(t-s))\ge t-s\} = \{r(s)\ge t-s\}$

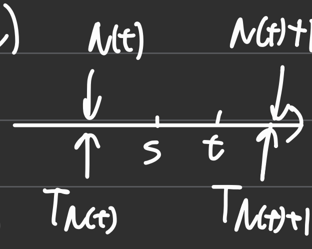
回顾 $\overline{R_y(t)}$ 的分布：$P(r(t)>y) = \bar F(t+y) + \int_0^t \bar F(t+y-x)\,dM(x)$

于是 $P(T_{N(t)}\le s) = P(r(s)\ge t-s)$

$$= \bar F(s+(t-s)) + \int_0^s \bar F(s+t-s-x)\,dM(x)$$

$$= \bar F(t) + \int_0^s \bar F(t-x)\,dM(x) \qquad \square$$

分解(复杂)：$P(T_{N(t)}\le s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n\le s, N(t)=n)$



$= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n\le s,\ T_{n+1}>t)$

$= P(T_0\le s,\ T_1>t) + \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n\le s,\ T_{n+1}>t)$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} P(T_n \le s, T_{n+1} > t \mid T_n = y)\, dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{s} P(T_{n+1} > t \mid T_n = y)\, dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{s} P(X_{n+1} > t-y)\, dF_n(y)$$

$$= \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y)\, d\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) = \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y)\, dM(y) \quad \square$$

(Fubini)

3、设 $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$ 是独立同 (0,1) 均匀分布的随机变量，若 $N = \min\{n : U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n > 1\}$，请计算 $E(N)$。

考虑 $N(t) = \min\{n : U_1 + \cdots + U_n > t\}$，所求即为 $E[N(1)]$ $(t \ge 0)$

$$E[N(t)] = \int_0^1 E[N(t) \mid U_1 = x]\, p_{U_1}(x)\, dx$$

其中 $E[N(t) \mid U_1 = x] = \begin{cases} 1 + E[N(t-x)] & 0 < x \le t \\ 1 & t < x < 1 \end{cases}$

从而 $E[N(t)] = \int_0^t (1 + E[N(t-x)])\, dx + \int_t^1 1\, dx = 1 + \int_0^t E[N(t-x)]\, dx$

即 $m(t) = 1 + \int_0^t m(t-x)\, dx = 1 + \int_0^t m(y)\, dy \Rightarrow m'(t) = m(t)$

$\Rightarrow m(t) = Ce^t$，又因为 $m(0) = E[N(0)] = 1$，所以 $m(t) = e^t$

进而 $E[N] = E[N(1)] = e$

1、 设顾客相继到达一个火车站，是一个强度为 λ 的泊松过程。若每隔时间 t 发出一列火车。同时还假定当有 n 个旅客在车站等候时车站每单位时间要付出 nc 元偿金，而开出一列火车的成本是 D 元。求车站的最优发车时间。

一个周期(t时间)内, 发车成本 $= X_1\cdot 0 + X_2\cdot C + \cdots + X_{N(t)}\cdot (N(t)-1)C + D$,

$E[C|N(t)=n] = c(E[X_2]+2E[X_3]+\cdots+(n-1)X_n)+D$

$= \frac{c}{\lambda}(1+2+\cdots+(n-1))+D = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+D$

$\Rightarrow E[C] = E[E[C|N(t)=n]] = \frac{c}{2\lambda}E[n^2-n]+D$

因为 $Var(N(t)) = E[(N(t))^2]-(E[N(t)])^2 = \lambda t \Rightarrow E[N(t)^2] = \lambda t+(\lambda t)^2$

所以 $E[C] = \frac{c\lambda t^2}{2}+D$, 根据更新回报定理, 单位时间期望成本为 $\frac{c\lambda t}{2}+\frac{D}{t}$

$\Rightarrow$ 当 $\frac{c\lambda t}{2} = \frac{D}{t}$, 即 $t = \sqrt{\frac{2D}{c\lambda}}$ 时,

2、 假设一辆小汽车的寿命可用分布为 $F(x)$ 的随机变量表示，当小汽车损坏或用了 A 年时，车主就以旧换新。以 $R(A)$ 记一辆用了 A 年的旧车卖出的价格，一辆损坏的车没用任何价格，以 C_1 记一辆新车的价格，且假设每当小汽车损坏时还要额外承担费用 C_2。每当购置一辆新车时就说一个循环开始，请计算长时间后单位时间的平均费用。

假小汽车寿命 $X\sim F(x)$, 且 $0\le X\le A$.

一个周期内平均费用:

$E[R_1] = C_1+\underbrace{P(X\le A)}_{\text{不到A年就坏了}}(C_2-0)+\underbrace{P(X>A)}_{\text{用了A年要卖}}(-R(A)) = C_1+F(A)C_2-(1-F(A))R(A)$

一个周期平均时长

$\cancel{E[X_1|X=x] = x F(A)+A(1-F(A))}$

$\cancel{\Rightarrow E[X_1] = \left(\int_0^{A} x\,dF(x)\right)F(A)+A(1-F(A))}$

$X_1 = \begin{cases} X & X\le A \\ A & X>A \end{cases}$

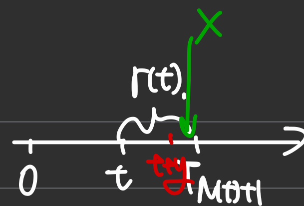
$E[X_1] = 1(X\le A)E[X]+1(X>A)E[A]$

$= \int_0^A x\,dF(x)+A(1-F(A))$

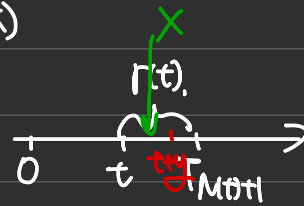
$\therefore$ 平均费用 $\Rightarrow \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{C_1+F(A)C_2-\overline{F(A)}R(A)}{\int_0^{\infty} x\,dF(x)+A\overline{F(A)}}$

以 $r(t)=T_{N(t)+1}-t$ 表示 t 时刻的剩余寿命，即从 t 开始到下次更新剩余的时间，$s(t)=t-T_{N(t)}$ 为 t 时刻的年龄。

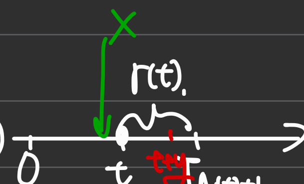
求 $r(t)$ 和 $s(t)$ 的极限分布。

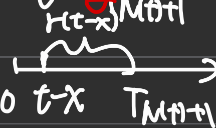


考虑 $\overline{R_y(t)}=P(r(t)>y)=\int_0^\infty P(r(t)>y\mid X_1=x)\,dF(x)$



$$P(r(t)>y\mid X_1=x)=\begin{cases}1 & x>t+y\\ 0 & t<x<t+y\\ P(r(t-x)>y)=\overline{R_y(t-x)} & 0<x<t\end{cases}$$





于是 $\overline{R_y(t)}=\int_0^t\overline{R_y(t-x)}\,dF(x)+\int_t^{t+y}0\,dF(x)+\int_{t+y}^\infty 1\,dF(x)$

$=\overline{F}(t+y)+\int_0^t\overline{R_y(t-x)}\,dF(x)$

(其中 $\overline{F}(t+y)=1-F(t+y)$)

根据更新方程解的存在性 $\overline{R_y(t)}=\overline{F}(t+y)+\int_0^t\overline{F}(t+y-x)\,dM(x)$

注意到 ① $F(x)$ 为连续函数

② $\int_0^\infty\overline{F}(t+y)\,dt=\int_0^\infty P(X_1>t+y)\,dt=\int_y^\infty P(X_1>z)\,dz$

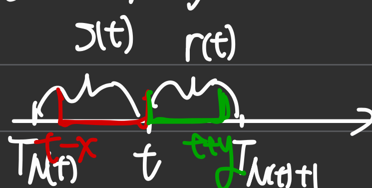
$z=t+y\in(y,\infty)$

$\le\int_0^\infty P(X_1>z)\,dz=E[X_1]=\mu<\infty$.

因此根据关键更新定理

$$\lim_{t\to\infty}\overline{R_y(t)}=\lim_{t\to\infty}P(r(t)>y)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\overline{F}(t+y)\,dt=\frac{1}{\mu}\int_y^\infty(1-F(z))\,dz$$

再考虑 $s(t)$ 的极限分布.



$r(t)>y\Leftrightarrow\{N(t)\}$ 在 $[t,t+y]$ 无更新

$s(t)>x\Leftrightarrow\{N(t)\}$ 在 $[t-x,t]$ 无更新

$\{s(t)>x,\ r(t)>y\}\Leftrightarrow N(t)$ 在 $[t-x,t+y]$ 无更新.

而 $r(t-x)>x+y\Leftrightarrow N(t)$ 在 $[t-x,t-x+(x+y)]=[t-x,t+y]$ 无更新.

因此 $\{r(t-x)>x+y\} \Leftrightarrow \{S(t)>x,\ r(t)>y\}$，从而

$$\lim_{t\to\infty} P(S(t)>x,\ r(t)>y) = \lim_{t\to\infty} P(r(t-x)>x+y) = \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} 1-F(z)\,dz.$$

$$\text{从而 } \lim_{t\to\infty} P(S(t)>x) = \lim_{t\to\infty} P(S(t)>x,\ r(t)>0) = \frac{1}{\mu}\int_{x}^{\infty}(1-F(z))\,dz$$

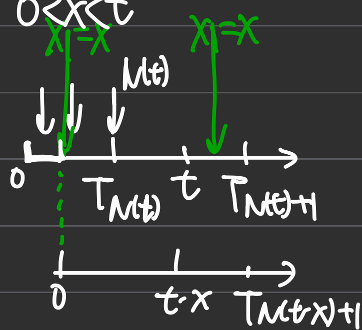
例 4.2.1（瓦尔德（Wald）等式） 设 $\{X_i\}$ 独立同分布 $E(X_i)<+\infty, i=1,2,\cdots$，证明：

$$E(T_{N(t)+1}) = E(X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)+1}) = E(X_1)E(N(t)+1)$$

$$E[T_{N(t)+1}] = \int_0^{\infty} E[T_{N(t)+1} \mid X_1=x]\,dF(x)$$

$N(t)=0 \Rightarrow N(t)+1=1$

$$\text{其中 } E[T_{N(t)+1} \mid X_1=x] = \begin{cases} E[T_1]=x & x>t \Rightarrow \\ E[T_{N(t-x)+1}+X_1] & 0<x<t \end{cases}$$



$$\therefore E[T_{N(t)+1}] = \int_0^t x + E[T_{N(t-x)+1}]\,dF(x) + \int_t^{\infty} x\,dF(x)$$

$$= E[X_1] + \int_0^t E[T_{N(t-x)}]\,dF(x)$$

根据更新方程解的存在性. $E[T_{N(t)+1}] = E[X_1] + \int_0^t E[X_1]\,dM(x)$

$$= E[X_1] + E[X_1]\int_0^t dM(x)$$

$$= E[X_1] + E[X_1]\cdot E[N(t)]$$

$$= E[X_1]\cdot E[N(t)+1]$$

$$\int_0^t m(x)dx = M(t)-M(0) = M(t)$$

三、(10 分)（产品保修策略）假设某产品一旦损坏，顾客立刻更换或者购买新的。设新产品成本为 2021 元，产品寿命为一个非负连续随机变量 X，X 的期望为 5 年。设某公司出售该商品采取如下更换策略：

(1) 产品售出后，若在期限 3 年内损坏，则免费更换，但免费更换时间不重新开始计时。

(2) 若在期限 3 年之后损坏，则按全价购买新产品，且免费更换时间重新开始计时。

令 $R(t)$ 表示 t 时刻公司对一个顾客的更换总成本，$t>0$，求 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{E(R(t))}{t}$。

产品寿命 X, $E[X]=5$, 设 $X\sim F(x)$ （每次更换为一次更新）

设一个更换周期内成本为 R_1，一个周期的平均长度为 X_1，$N(t)$ 为 t 时间内产品更换次数，则 $N(t)$ 为一个更新过程

① $R_1 = 2021(N(3)+1)$（只需支付期限内损坏的产品成本 + 第一次售出的成本）

② X_1 也为第一次付费更换产品的时刻（付费更新时刻），即 $X_1 = T_{N(3)+1}$

根据 Wald 等式，$E(X_1) = E[T_{N(3)+1}] = E[X](E[N(3)]+1) = 5(E(N3)+1)$

因此由更新回报定理，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{2021\,E[N(3)+1]}{5\,E[N(3)+1]}$

$= \frac{2021}{5}$

三、(15 分) $\{X_1,X_2,X_3,\cdots\}$ 是一列独立同分布的非负随机变量，$\{N(t),t\ge 0\}$ 是更新间隔为 $\{X_1,X_2,X_3,\cdots\}$ 的更新过程，时刻 t 的剩余寿命记为 $Y(t)=T_{N(t)+1}-t$，其中 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$。

(1)（7 分）证明 $\frac{1}{2t}\sum\limits_{n=1}^{N(t)}X_n^2 \le \frac{1}{t}\int_0^t Y(u)du \le \frac{1}{2t}\sum\limits_{n=1}^{N(t)+1}X_n^2$；

(2)（8 分）基于更新回报定理，计算 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(u)du}{t}$（假设 X_i 有界）。

(1)

~~$P(Y(u)>y) = \bar F(u+y) + \int_0^u \bar F(u+y-x)\,dx$ F 为 X_i 的分布函数~~

由于 $\int_0^{T_{N(t)}} Y(u)du < \int_0^t Y(u)du < \int_0^{T_{N(t)+1}} Y(u)du$

且注意到 $\int_0^{T_{N(t)}} Y(u)\,du = \sum\limits_{i=1}^{N(t)}\int_{T_{i-1}}^{T_i} Y(u)\,du = \sum\limits_{i=1}^{N(t)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_{N(u)+1}-u)du$

因为 $T_{i-1}\le u\le T_i$ 时，$N(u)=i-1$，从而 $T_{N(u)+1}=T_i$，因此

（第 $i-1$ 个事件已达）（第 i 个事件未达）

原式 $= \sum\limits_{i=1}^{N(t)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_i-u)\,du$，令 $v=T_i-u$，则 $v\in(T_i-T_{i-1},0)$

从而原式 $= \sum_{i=1}^{N(t)} \int_0^{T_i - T_{i-1}} v\,dv = \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{1}{2}(T_i - T_{i-1})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i^2$

因此 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i^2 < \int_0^t Y(u)du < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i^2 < \frac{1}{t}\int_0^t Y(u)du < \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i^2$$

(2) 设 $R(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} \overset{R_n}{X_n^2}$，则 $\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{E[X_1^2]}{E[X_1]}$

$$\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n^2 = \frac{1}{2t}\cdot\left(\sum_{n=1}^{N(t)} X_n^2 + X_{N(t)+1}^2\right) \to \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{E[R(t)]}{t}+0\right) = \frac{E[X_1^2]}{2E[X_1]}$$

根据夹逼准则知 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Y(u)du = \frac{E[X_1^2]}{2E[X_1]}$

Poisson Process

一、(10 分) 假设某种意外事故的发生次数受某种随机因素影响，并且事故的发生次数可以用条件泊松过程 $N(t)$ 来刻画，即假设随机因素为一个随机变量 Λ，在 $\Lambda=\lambda$ 的条件下，过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程。若 Λ 的期望和方差分别为 $E(\Lambda)=a$，$Var(\Lambda)=b^2$，请计算 $Cov(N(1),N(2))$。

$$P(N(t)=n)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dG(\lambda)$$

$$Cov(N(1),N(2))=E[N(1)N(2)]-E[N(1)]\,E[N(2)]=\cancel{2a^2+a+b^2-2a^2=a+b^2}$$

$$E[N(1)]=E[E[N(1)\mid\Lambda=\lambda]]=E[\lambda\cdot 1]=a.$$ 同理 $E[N(2)]=E[2\lambda]=2a$

$$E[N(1)N(2)]=E[N(1)(N(2)-N(1)+N(1))]=E[N(1)(N(2)-N(1))]+E[N^2(1)]$$

$$\cancel{=E[N(1)]\,E[(N(2)-N(1))]+E[N^2(1)]=a\cdot a+E[E[N^2(1)\mid\Lambda=\lambda]]}$$

$$\cancel{=a^2+E[\lambda\cdot 1+\lambda^2\cdot 1^2]}$$

$$\cancel{=a^2+a+(b^2+a^2)}$$

$$\cancel{=2a^2+a+b^2}$$

$$=E[E[N(1)(N(2)-N(1))\mid\Lambda=\lambda]]+E[E[N^2(1)\mid\Lambda=\lambda]]$$

$$=E[\lambda^2]+E[\lambda\cdot 1+\lambda^2\cdot 1^2]=(b^2+a^2)+(a+b^2+a^2)$$

$$=2b^2+2a^2+a.$$

$$\Rightarrow Cov(N(1),N(2))=(2b^2+2a^2+a)-2a^2=2b^2+a.$$ (不要过早打开括号)

二、(10 分) 乘客按照强度为 $\lambda=100$（人/小时）的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 15 分钟将候车的乘客全部送走。假设每位乘客等待时间不超过 10 分钟，就没有等待成本；反之，其等待时间超过 10 分钟，则有等待成本 c。请计算一次发车乘客的总等待成本的期望。

$\lambda=100$人/小时 $=\frac{5}{3}$人/分钟

设乘客 i 等待了 Y_i 分钟，则乘客 i 的成本为 $C_i=\begin{cases}0 & 0<Y_i\le 10\\ c & Y_i>10\end{cases}$,

$Y_i=15-T_i$，从而 $C_i=\begin{cases}0 & 5\le T_i<15\\ c & 0<T_i<5\end{cases}$

一次发车的乘客等待成本 $=E\left[\sum_{i=1}^{N(15)}C_i\right]=E\left[E\left[\sum_{i=1}^{n}C_i\mid N(15)=n\right]\right]$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}E[C_i\mid N(15)=n]\right]$$

“和15个[0,1]上顺序统计量同分布”

其中 $E[C_i \mid N(15)=n] = P(0<T_i<5 \mid N(15)=n)\cdot C = \frac{1}{3}C$

此时 $T_1,\dots T_n$ 为一均匀分布

因此 $E\left[\sum_{i=1}^{N(15)} C_i\right] = E\left[\frac{1}{3}nC\right] = \frac{1}{3}C\cdot E[n] = \frac{1}{3}C\, E[N(15)]$

$= \frac{1}{3}C\cdot\left(\frac{5}{3}\times 15\right) = \frac{25C}{3}$

一、(10分) 某水库的蓄水水平以每天1000单位的常数速率耗损。水库水源由随机发生的降雨补给：降雨的次数按每天0.5的速率的泊松过程发生，由一次降雨加进水库的水量以概率0.6为4000单位，而以概率0.4为6000单位。现在的蓄水水平刚刚稍低于4000单位。请计算8天内水库始终都有水的概率。

降雨量：$\Lambda' = 0.5\Lambda$，$\Lambda = 4000 \quad p=0.6$ $\Rightarrow E[\Lambda] = 4800$

$\Lambda = 6000 \quad p=0.4$

现：4000单位 ⇒ 缺水可能性：① 前4天未下雨，第5天缺水

② 前4天降雨但降雨量 ≤ 4000

后4天不降雨，则第6,7,8天缺水

$P(N(t)=n) = e^{-0.5t}\frac{(0.5t)^n}{n!}$

$\Rightarrow P(N(4)=0) = e^{-2}$，$P(N(4)=1) = e^{-2}\cdot\frac{2^1}{1!} = 2e^{-2}$，

$P(N(8)-N(4)=0) = P(N(4)=0) = e^{-2}$

于是 $P(\text{缺水}) = P(N(4)=0) + P(N(4)=1)\cdot P(N(8)-N(4)=0)\cdot P(\text{降雨量}=4000)$

$= e^{-2} + 2e^{-2}\cdot e^{-2}\cdot 0.6 = e^{-2} + 1.2e^{-4}$

$\Rightarrow P(\text{不缺水}) = 1 - e^{-2} - 1.2e^{-4}$

一、(10 分)某水库的蓄水水平按每天 1000 单位的常数速率耗损。水库水源由随机发生的降雨补给。降雨按每天 0.2 的速率的泊松过程发生。由一次降雨加进水库的水量以概率 0.8 为 5000 单位，而以概率 0.2 为 8000 单位。现在的蓄水水平刚刚稍低于 5000 单位。请计算 10 天内水库始终都有水的概率。

$\lambda = -0.2$

缺水：① 前5天不降雨

② 前5天降雨1次，但5000单位，且后5天不降雨

$$P(N(t)=n) = e^{-0.2t}\frac{(0.2t)^n}{n!}$$

$$\therefore P(\text{缺水}) = P(N(5)=0) + P(N(5)=1)\,P(N(10)-N(5)=0)\cdot P(\text{降雨}5000)$$

$$= e^{-1} + e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot 0.8 = e^{-1} + 0.8e^{-2}$$

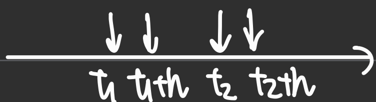
$$\Rightarrow P(\text{有水}) = 1 - e^{-1} - 0.8e^{-2}$$

二、(10 分) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，T_i 表示第 i 次 ($i = 1,2,\cdots$)事件发生的时刻，计算

(1) T_1和T_2的联合概率密度函数；

(2) 条件概率 $P(T_1 < 1, T_2 < 3 \mid N(4) = 2)$。

(1) 取充分小的 $h>0$ 使得 $t_1 < t_1+h < t_2 < t_2+h$.



那么 $P(t_1 < T_1 < t_1+h,\ t_2 < T_2 < t_2+h)$

$$= P(N(t_1)=0,\ N(t_1+h)-N(t_1)=1,\ N(t_2)-N(t_1+h)=0,\ N(t_2+h)-N(t_2)=1)$$

$$= e^{-\lambda t_1}\cdot \lambda h e^{-\lambda h}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1-h)}\cdot \lambda h e^{-\lambda h}$$

$$= \lambda^2 h^2 e^{-\lambda t_1 - \lambda h - \lambda t_2 + \cancel{\lambda t_1} + \cancel{\lambda h} - \cancel{\lambda h}} = \lambda^2 h^2 e^{-\lambda h - \lambda t_2}$$

$$\Rightarrow f(t_1,t_2) = \lim_{h\to 0}\frac{P(t_1<T_1<t_1+h,\ t_2<T_2<t_2+h)}{h^2} = \lambda^2 e^{-\lambda t_2} \quad (t_2 > t_1 > 0)$$

(2) $\cancel{\dfrac{P(T_1<1,\ T_2<3,\ N(4)=2)}{P(N(4)=2)}}$

$\Downarrow$

与上想到：给定 $N(t)=n$ 时，$(T_1 \dots T_n)$ 与 $(U_{(1)} \dots U_{(n)})$ 同分布.

$$P(T_1<1, T_2<3 \mid N(4)=2) = P(U_{(1)}<1,\ U_{(2)}<3)$$

(其中 $U_{(1)}, U_{(2)}$ i.i.d. $\sim \mathrm{Unif}[0,4]$)

联合分布：$\dfrac{n!}{t^n} = \dfrac{2!}{4^2} = \dfrac{1}{8}$

$$\Rightarrow P(U_{(1)}<1,\ U_{(2)}<3) = \int_0^1\int_{t_1}^3 \frac{1}{8}\,dt_2\,dt_1 = \int_0^1 \frac{1}{8}(3-t_1)\,dt_1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

一、**(10 分)**令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，且与均值为 μ 和方差为 σ^2 的非负随机变量 T 相互独立，求 $Cov(N(T+1), N(T))$。

$E[T]=\mu$, $Cov(N(T+1), N(T)) = E[N(T+1)N(T)] - E[N(T+1)]\,E[N(T)]$

$E[N(T)] = E[\,E[N(t) \mid T=t]\,] = E[\lambda T] = \lambda\mu.$

$E[N(T+1)] = E[\lambda(T+1)] = \lambda(\mu+1)$

$E[N(T)N(T+1)] = E[\,E[N(t)N(t+1) \mid T=t]\,]$

其中 $E[N(t)N(t+1) \mid T=t] = E[N(t)(N(t+1)-N(t)+N(t)) \mid T=t]$

$= E[N(t)(N(t+1)-N(t)) \mid T=t] + E[N^2(t) \mid T=t]$

$= E[N(t) \mid T=t]\,E[N(t+1)-N(t) \mid T=t] + \underbrace{Var(N(t) \mid T=t) + (E[N(t) \mid T=t])^2}$

$= (\lambda T)(\lambda 1) + (\lambda T + \lambda^2 T^2) = \lambda^2 T + (\lambda T + \lambda^2 T^2)$

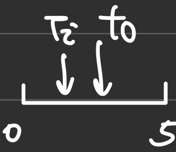
从而 $E[N(T)N(T+1)] = \lambda^2 E[T] + \lambda E[T] + \lambda^2 E[T^2]$

$= \lambda^2\mu + \lambda\mu + \lambda^2(\sigma^2+\mu^2)$

$\therefore Cov(N(T+1), N(T)) = \lambda^2\mu + \lambda\mu + \lambda^2(\sigma^2+\mu^2) - \lambda\mu \cdot \lambda(\mu+1)$

$= \lambda\mu + \lambda^2\sigma^2$

二、**(10 分)** 乘客按照强度为 λ 的泊松过程到达车站候车，公交车每隔 5 分钟将候车的乘客全部送走，为了尽可能缩短高峰期的候车时间，计划在两次发车时间中加发一班车（将候车乘客全部送走）。假设加车的时间为 $t_0 \in (0,5)$，计算最优的加车时间，以及此时乘客的平均候车时间。



设乘客到达时间为 T_i, 则 $[0,t_0)$ 乘客候车时间: $\sum_{i=1}^{N(t_0)} (t_0 - T_i)$

$E\left[\sum_{i=1}^{N(t_0)} (t_0 - T_i)\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{n} (t_0 - T_i) \,\middle|\, N(t_0)=n\right]\right]$

$= E\left[n t_0 - \sum_{i=1}^{n} E[T_i] \,\middle|\, N(t_0)=n\right] = E\left[n t_0 - n\frac{t_0}{2} \,\middle|\, N(t_0)=n\right] = \frac{t_0}{2} E[N(t_0)] = \frac{\lambda t_0^2}{2}$

$T_i \sim Unif(0,t_0)$

类似地, $[t_0,5)$ 乘客的候车时间 $\frac{\lambda(5-t_0)^2}{2}.$

总候车时间 $g(t_0)=\frac{\lambda}{2}\left(t_0^2+(5-t_0)^2\right) \Rightarrow g'(t_0)=\frac{\lambda}{2}\left(2t_0+2t_0-10\right)=0$

$\Rightarrow t_0^*=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$

$\therefore$ 最佳加车时间为 $t_0=\frac{5}{2}$ 此时乘客的平均候车时间为

$$\frac{\lambda}{2}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)=\frac{25}{4}\lambda$$

3、保险索赔的发生是一个速率为 λ 的泊松过程。相继的索赔金额是独立的随机变量，其分布函数为 $G(\cdot)$，均值为 μ，而且与索赔的发生时间独立。以 S_i 和 C_i 分别记第 i 次索赔的时间和金额，到时间 t 处理的所有索赔要求的全部现值，记为 $D(t)$，定义为

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i,$$

其中 $\alpha>0$ 是折现率，而 $N(t)$ 是到时间 t 为止的索赔次数，求 $D(t)$ 的期望值。

$C_i \sim G$

$E[C_i]=\mu$

$S_i \perp\!\!\!\perp C_i$

$$E[D(t)]=E\left[E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha S_i} C_i \,\middle|\, N(t)=n\right]\right]$$

其中 $E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha S_i} C_i \,\middle|\, N(t)=n\right]=\sum_{i=1}^{n} E\left[e^{-\alpha S_i}\,\middle|\, N(t)=n\right] E[C_i]$

$=\mu\sum_{i=1}^{n} E\left[e^{-\alpha S_i}\,\middle|\, N(t)=n\right]$

$S_1,\dots,S_n \sim Unif[0,t]$

$$=\mu\sum_{i=1}^{n}\int_0^t e^{-\alpha x}\frac{1}{t}dx=\frac{n\mu}{t}\int_0^t -\frac{1}{\alpha}d(e^{-\alpha x})=-\frac{n\mu}{\alpha t}\left(e^{-\alpha x}\Big|_0^t\right)$$

$$=-\frac{n\mu}{\alpha t}\left(e^{-\alpha t}-1\right)=\frac{n\mu}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

那么 $E[D(t)]=\frac{\mu}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)E[N(t)]=\frac{\mu\lambda}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$

3.10 $[0,t]$ 时间内某系统受到冲击的次数 $N(t)$ 形成参数为 λ 的 Poisson 过程。每次冲击造成的损害 Y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 独立同指数分布，均值为 μ。设损害会积累，当总损害超过一定极限 A 时，系统将终止运行。以 T 记系统运行的时间（寿命），试求系统的平均寿命 $E(T)$。（提示：对于非负随机变量，$E(T)=\int_0^{+\infty} P\{T>t\}\mathrm{d}t$。）

$Y_i \sim Exp(\lambda)$ 损害 $D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，显然 $\{T>t\}=\{D(t)\le A\}$，

$$P(T>t)=P(D(t)\le A)=P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\le A\right)=\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\le A \mid N(t)=n\right)P(N(t)=n)$$

内部 $\sum Y_i \sim \Gamma(n,\frac{1}{\mu})$，从而

$$P(T>t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^A \frac{\mu^{-n}}{(n-1)!}e^{-\frac{t}{\mu}}t^{n-1}dt\right)\cdot\left(e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)$$

$$=e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot\int_0^A\frac{\mu^{-n}}{(n-1)!}e^{-\frac{t}{\mu}}t^{n-1}dt\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}P(T>t)dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt+\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\cdot t^n e^{-\lambda t}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^A\frac{\mu^{-n}}{(n-1)!}e^{-\frac{t}{\mu}}t^{n-1}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^A\frac{\mu^{-n}}{(n-1)!}e^{-\frac{t}{\mu}}t^{n-1}dt\right]\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}t^n e^{-\lambda t}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A\frac{1}{\mu}\frac{(t/\mu)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t/\mu}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^A\frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t/\mu)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t/\mu}\right)dt=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^A\frac{1}{\mu}dt$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\frac{A}{\lambda\mu}$$

因此 $E[T]=\frac{1}{\lambda}+\frac{A}{\lambda\mu}$